Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol prostřednictvím řešení slovních úloh

Nedokončené strategie

Darina Jirotková, Jana Slezáková,
Alena Kinclová, Martina Šmejkalová

*Tento materiál tvoří přílohu
k Metodice Podpora integrace matematické, čtenářské
a jazykové gramotnosti u žáků základních škol
prostřednictvím řešení slovních úloh
(Vondrová et al., 2023).*

PEDAGOGICKÁ
FAKULTA
Univerzita Karlova

SLOVNÍ ÚLOHY

Metodický materiál vznikl s finanční podporou projektu TAČR TL03000469 Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol.

společná práce	individuální práce	práce ve dvojicích	práce ve skupinách	porozumění textu	rozvoj jazykové gramotnosti	poznatky z pilotáží

Metodický materiál k typu Nedokončené strategie (NES)

Přehled úloh a doporučené zařazení do ročníku

název úlohy	ročník	téma	nabídnuté strategie	str.
NES01 Výlet	4.–6.	dělení se zbytkem	Tabulka 0–99, Výpočet, Číselná osa, Manipulace, Čtverečkovaný papír	10
NES02 Supermarket	7.–9.	přímá úměrnost	Dlouhá tabulka, Balíčky, Počítání přes jednotku, Krátká tabulka, Tabulka s jinou vazbou	18
NES03 Myslím si číslo	3.–5.	propedeutika rovnic, zlomky	Koláč, Úsečka, Had, Řešení odzadu, Řešení vhledem	26
NES04a Kolik let je Honzíkovi?	2.–3.	dynamické slovní úlohy o věku	Sehrávka, Časová osa	32
NES04b Kolik let je Honzíkovi?	4.–6.		Sehrávka, Časová osa, Zkrácená tabulka, Číselná osa s evidencí vazeb	40
NES04c Kolik let je Honzíkovi?	7.–9.		Zkrácená tabulka, Číselná osa s evidencí vazeb, Rovnice	42
NES05 Narozeninová oslava I	3.–4.	práce s daty, kombinatorika	Sehrávka, Tabulka – turnaj, Obloučky, Pětiúhelník, Dvojice písmen	43
NES06 Narozeninová oslava II	5.–7.		Sehrávka, Tabulka – turnaj, Tabulka – závislost	49
NES07 Divadlo	4.–7.	propedeutika dvou rovnic o dvou neznámých	Proužek (úsečkový model), Tabulka, Skupinky	55
NES08 Dva traktory	8.–9.	o společné práci	Rozdělení obdélníku, Čtverečkovaný papír, Tabulka, Výpočet – zlomky	61

Popis

Specifickým rysem úloh tohoto typu je, že se žáci seznámí s nedokončeným řešením slovní úlohy fiktivními žáky. Jinými slovy nabízíme žákům způsob, jak úlohu uchopit a jak si k ní vytvořit situační model, a překonáváme tak časté obtíže žáků při řešení slovních úloh. Různost možných způsobů řešení včetně grafických směruje na různé typy žáků a různé úrovně myšlení.

Úlohy jsou voleny tak, aby jejich kontext byl žákům srozumitelný a aby je bylo možné snadno matematizovat a různým způsobem modelovat. Jedná se tedy o slovní úlohy, k nimž je možné rozpracovat několik různých řešitelských strategií, z nichž některé mají oporu v manipulaci a vizualizaci situace a vztahů mezi objekty v úloze. Řešitelské strategie fiktivních žáků jsou pouze do jisté míry rozpracovány a od žáků se očekává, že (alespoň dvě) řešení dokončí. To znamená, že strategii porozumí natolik, že ji budou umět dovést do konce a najít výsledek úlohy. Dokončení řešení v započaté strategii je indikátorem porozumění jak jazykové, tak matematické složce úlohy, ale zejména vazbám mezi údaji v úloze. V následných úlohách žáci využívají získané znalosti a řešitelské nástroje (manipulativní, grafické) v nových situacích a prohlubují si tak jejich porozumění.

Učitel si může sám rozhodnout, do kterého ročníku úlohu zařadí. Když zvolí pro své žáky úlohu určenou pro nižší ročník, než který doporučujeme, obvykle to nevadí, protože důraz je kladen na několik řešitelských strategií. Je však potřeba vždy zařadit aspoň jednu strategii, která by mohla být pro žáky výzvou.

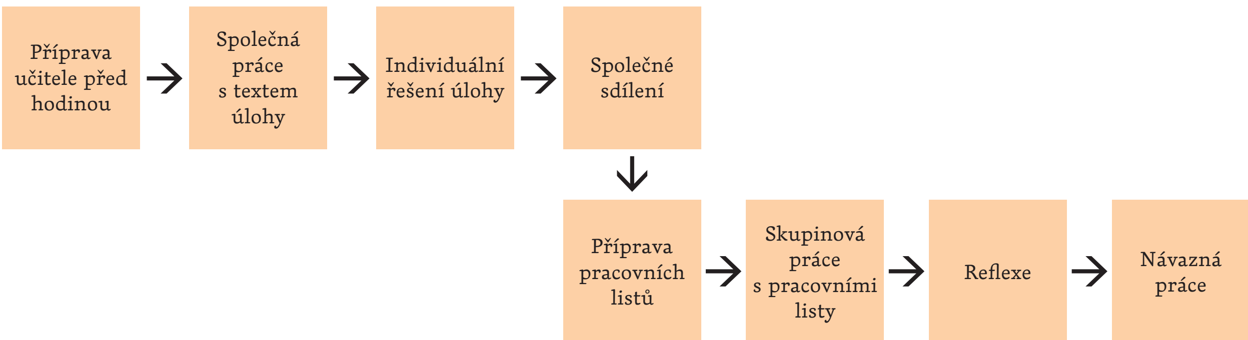
Metodické listy k jednotlivým úlohám obsahují:

- popis úlohy, ve kterém jsou uvedeny komplikující parametry úlohy z hlediska matematického i jazykového,
- podrobný rozbor jednotlivých nedokončených řešitelských strategií s očekávaným způsobem jejich dokončení.

Pro žáky může být někdy problematické zabývat se strategiemi fiktivních žáků, aniž by se pokusili vyřešit úlohu po svém, proto navrhujeme dva různé způsoby implementace metodických materiálů.

Většina učitelů z našich pilotáží dala přednost variantě A, tedy dala žákům nejprve možnost, aby úlohu vyřešili po svém. Pak bylo ale důležité, aby se žákovské strategie sdílely tak, aby jim pokud možno všichni porozuměli. Druhý den učitelé k vybraným žákovským strategiím přidali alespoň dvě strategie z naší nabídky, které ve třídě nezazněly.

Doporučené použití A



Část A1 – Příprava učitele před hodinou

U každého metodického listu je uvedeno konkrétní doporučení, co si má učitel před hodinou připravit (např. pomůcky, pracovní listy pro řešení a reflexi), a navíc promyslí, např. časové rozvržení hodiny, rozdělení žáků do heterogenních, či homogenních skupin podle jejich kognitivních schopností. Důvodem pro rozdělení do homogenních skupin může být i to, že každé skupině učitel nastaví jinou obtížnost. Žáci na přibližně stejné kognitivní úrovni mohou lépe spolupracovat, protože budou o úloze uvažovat podobně. Jestliže je třída dobře nastavena na spolupráci, je možné i rozdělení do heterogenních skupin. Je třeba dobře zvážit složení skupin tak, aby byly vytvořeny vhodné podmínky pro komunikaci a spolupráci žáků.

Část A2 – Společná práce s textem úlohy

Učitel předloží žákům úlohu na pracovním listu, nebo ji promítne na tabuli a nechá nějaký čas na přečtení. Žáci se v této fázi snaží porozumět situaci popsané v úloze, což učitel podpoří otevřením diskuse. K tomu může použít otázky zaměřené na porozumění úloze uvedené na každém metodickém listu. Další skupina otázek a úkolů se zaměřuje na rozvoj jazykové gramotnosti. Otázky a úkoly volí učitel podle potřeby, není nutné, aby použil všechny. Je však nutné, aby zajistil, že každý žák rozumí tomu, co má řešit. Prostý dotaz učitele typu *Rozumí tomu všichni?* či *Kdo něčemu nerozumí?* nemusí přinést skutečnou zpětnou vazbu.

V některých pilotážích se ukázalo, že při jazykovém rozboru úlohy bylo vhodné *neuvést* otázku úlohy a s textem pracovat jako s popisem jisté situace. Tím se předejde potřebě některých žáků začít úlohu hned řešit. Vhodná práce s textem je také metodou *VŠÍMÁM SI – ZAJÍMÁ MĚ.* Učitel napíše nebo promítne text na tabuli a pod něj připraví tabulku s uvedenými nadpisy. Žáci mají za úkol sdělovat, čeho si v textu všimli. Učitel zapisuje přesně, co žáci řekli, do levého sloupce. Dává žákům najevo, že zápisem na tabuli nevyjadřuje se sdělením svůj souhlas. Povzbuzuje je, že se ke všemu mohou vyjádřit. Nakonec následuje výzva k zamyšlení, co by žáky k napsanému na tabuli mohlo zajímat. To učitel zapisuje do pravého sloupce. Velice účinným důkazem o učení je, když pak žáci dostanou za úkol samostatně vymyslet takovou otázku či otázky, aby spolu s předloženým textem vznikla slovní úloha.

Část A3 – Individuální řešení úlohy

Učitel vyzve žáky k individuálnímu řešení úlohy a zdůrazní, že řešení mají být zaznamenána tak, aby ostatní dokázali interpretovat postup řešení na pracovním listě.

Část A4 – Společné sdílení

Učitel moderuje diskusi žáků o všech strategiích, které se ve třídě objevily. Vybrané strategie pojmenuje (např. podle žáka, který tak úlohu řešil) a do další hodiny je vystaví někde ve třídě (na nástěnce, na flipchartu, na tabuli).

Část A5 – Příprava pracovních listů

Učitel se na další práci (často na další hodinu následující den) připraví tak, že ze strategií nabízených v metodickém listu dané úlohy vybere jen takové dvě, které se ve třídě neobjevily a o nichž se domnívá, že jsou pro žáky nejvíce přínosné (doporučujeme vybrat strategii/e opřené o vizualizaci). K těmto dvěma řešitelským strategiím učitel připraví pracovní list, se kterým budou žáci pracovat ve skupinách. Ideálně by každý žák měl mít svou kopii pracovního listu, aby si mohl text svým tempem pročíst. (Při práci ve skupině s jedním pracovním listem se nemusí všichni žáci ke čtení textu dostat.) Individuální pracovní listy doplní učitel o evaluační dotazník, při jehož vyplnění na konci hodiny se žák má ohlédnout zpět k tomu, co všechno v hodině probíhalo, a zvědomit si efektivitu jednotlivých strategií ze svého pohledu.

Evaluační dotazník A

Názvy strategií, které se objevily ve třídě: ____________________________________

____

Názvy nabídnutých strategií, které jste ve skupině dokončovali: ______________

____

Ze všech strategií se mi nejvíce líbila strategie s názvem __________________,

protože ______________ ____

____

Překvapila mě strategie s názvem __________________, protože ______________

____

Měl/a jsem problém porozumět strategii s názvem _________________________

____

Nikdy bych nepoužil/a strategii s názvem __________________, protože

____

Příště bych asi použil/a strategii s názvem __________________

Část A6 – Skupinová práce s pracovními listy

Učitel třídu rozdělí do skupin po třech až čtyřech žácích a rozdá jim pracovní listy se sdělením, že se k němu dostala další dvě (nebo tři) odlišná řešení slovní úlohy. Ta však nejsou dokončená. Úkolem žáků je řešení v započaté strategii dokončit, najít a ověřit výsledek. Žáci ve skupině nejdříve postupně dokončí řešení fiktivních žáků, pak porovnají nabídnuté strategie a společně udělají zápis tak, aby výsledek práce mohli za skupinu prezentovat.

Při představování úkolu žákům řekneme, že se nejdříve seznámí s nějakými započatými strategiemi fiktivních žáků. Jako silně motivační se ukázalo zavedení hry *Na jasnovidce*. Žáci ve skupině jsou jasnovidci a mají za úkol proniknout do myšlení fiktivních žáků a poznat, jak chtěli úlohu řešit, a úlohu pak za ně dořešit. Důležité je, aby se myšlenky ve skupině sdílely, všichni jim dobře rozuměli a kdokoliv ze skupiny mohl prezentovat, na co jasnovidci přišli.

Část A7 – Společné sdílení a reflexe

Učitel zorganizuje vystavení pracovních listů všech skupin a jejich vzájemnou prohlídku. Dva zástupci každé skupiny postupně prezentují, jak řešení dokončili a jak ověřili jeho správnost. Hlavním cílem prezentace je porovnání nabídnutých strategií. Učitel moderuje třídní diskusi o efektivnosti jednotlivých strategií. Také může žákům pokládat otázky reflektující prezentace ostatních skupin, např. *Které prezentaci jsi rozuměl/a nejlépe? Proč?*, *Co tě zaujalo na práci jiných skupin?*, *Co pro tebe bylo nesrozumitelné? Proč?* apod. Nakonec každý žák vyplní sám za sebe evaluační dotazník.

V rozhovorech s žáky 6. a 7. ročníku zazněla kromě toho, že se přestali obávat slovních úloh, i myšlenka, že je zajímá, jak přemýšlí někdo jiný a jak někdo jiný může danou úlohu řešit. Tedy porovnáváním vlastního myšlení s myšlením fiktivního žáka docházelo u žáků velice silně k rozvoji metakognice.

Průběh řešení těchto úloh má pro učitele silný diagnostický potenciál – má mnoho příležitostí sledovat žákovská řešení, naslouchat diskusi žáků ve skupinách, sledovat jejich prezentace a vše porovnávat s výpověďmi v evaluačním dotazníku.

Část A8 – Návazná práce

Učitel předloží žákům během několika dní další slovní úlohy, které je možné řešit stejnými strategiemi jako úlohu základní. Může žáky vyzvat k využití určité strategie, nebo je nechá, aby si strategii zvolili sami. Je však důležité, aby ukázky řešení různými strategiemi byly žákům dostupné a nemuseli si je pamatovat. Nejlépe, když zůstanou někde ve třídě vyvěšeny. Takovým procvičováním si žáci některé strategie upevní. Důležité je, že budou vědět, že další úlohy mohou řešit různými strategiemi a že si mohou vybrat tu, které nejlépe rozumí.

Doporučené použití B

Příprava učitele před hodinou → Společná práce s textem úlohy → Skupinová práce s pracovními listy → Společné sdílení a reflexe → Návazná práce

Část B1 – Příprava učitele před hodinou stejná jako Část A1

Část B2 – Společná práce s textem úlohy (stejné jako Část A2)

Pozn.: V této fázi učitel žákům zdůrazní, že není jejich úkolem danou slovní úlohu řešit. Aby s tím žáci nezačali, je možné z textu úlohy vymazat otázku. Pak je vhodné do práce s textem zařadit i výzvu, jak bychom mohli ze situace vytvořit úlohu, na co bychom se mohli zeptat, co by mohlo být zajímavé zjišťovat.

Část B3 – Skupinová práce s pracovními listy

Učitel žákům sdělí, že nyní je cílem, aby pronikli do myšlení fiktivních žáků a posoudili a dokončili jejich započatá řešení. Učitel žáky rozdělí do skupin a rozdá pracovní listy, které jsou součástí metodického listu k úloze. Při práci s úlohou učitel nejprve použije pracovní list s nedokončenými strategiemi A, B, C. Nedokončené strategie D a E, pokud jsou nabídnuty, může žákům zadat později, nebo je dá do skupin, které jsou rychle hotovy. Žáci pracují ve skupinách s pracovními listy (více viz část A6). Úkolem každé skupiny je řešení v započaté strategii dokončit, najít a ověřit výsledek a zajistit, aby každý člen skupiny dokončeným strategiím rozuměl.

U úloh, u kterých je jednou z nabídnutých strategií sehrávka, doporučujeme, aby ji řídil učitel podle toho, jak je popsaná. Text je poněkud dlouhý a žáky, kterým by tato strategie mohla pomoci, nejspíše samotné čtení s porozuměním příliš unaví. Velice účinné je, pokud učitel s žáky sehraje lehce modifikovanou úlohu nedlouho před zadáním úlohy. Pak již není takový problém, aby si při čtení strategie žáci sehranou situaci vybavili.

Část B4 – Společné sdílení a reflexe (stejné jako Část A7)

V evaluačním dotazníku k přístupu B je vynechána pouze první položka. Dotazník je uveden v každém pracovním listu.

Část B5 – Návazná práce (stejné jako Část A8)

Závěrečná poznámka

Někteří učitelé, kteří s úlohami typu NES pracovali, byli překvapeni, kolik času takováto práce s úlohami zabere. Když si nahráli rozhovory žáků ve skupinách a pak je analyzovali, zjistili, že diskuse žáků byla často velice plodná a že i žáci, kteří měli problémy s řešením slovních úloh, sami přišli na řešení a dokázali vysvětlit řešení jiného žáka. Učitelé poznali, že delší čas byl dobře investovaný. Tedy, aby proběhlo řešení úlohy se všemi doporučenými částmi, je důležité tomu věnovat více času. Našim spolupracujícím učitelům obvykle stačily dvě vyučovací hodiny.

Z rozhovorů s vyučujícími, a především s žáky vyplynulo, že znatelný posun v řešení slovních úloh zaznamenali zejména ti žáci, kteří měli do té doby se slovními úlohami problémy. Např. jeden žák se vyjádřil takto: „Už se nebojím slovních úloh. Vím, že si vždycky mohu něco zkusit, a taky vím, co všechno si mohu zkusit. Zatím se mi vždycky podařilo najít způsob, jak slovní úlohu vyřešit. A i když to bylo jinak než u ostatních spolužáků, nebylo to špatně“. Zkušenosti z pilotáže potvrzují, že žáci posilují své (matematické) sebevědomí a ztrácí obavy z řešení i obvyklých učebnicových slovních úloh. Navíc se znatelně diferencují a každý si nachází svou vlastní cestu. To považujeme za dobrý příspěvek k rozvoji autonomie žáků. Tuto myšlenku potvrzují i zkušenosti z evaluace jednotlivých strategií žáků. Pro učitele to může být povzbuzením, aby svým žákům nabízel co nejbohatší škálu řešitelských strategií vzhledem k velké pestrosti jejich kognitivních schopností a preferencí. Stejnou strategii někteří žáci považovali za oblíbenou a vhodnou, zatímco pro jiné byla nesrozumitelná a nepoužili by ji.

Na konci metodických materiálů k jednotlivým úlohám uvedeme některé zajímavé postřehy z evaluačních dotazníků z několika tříd. Nejedná se však o žádnou pečlivou statistiku.

Metodický list k úloze Výlet

4. až 6. ročník Téma: dělení se zbytkem

Na výletě bylo více než 55, ale méně než 65 dětí. Vedoucí nejdříve rozdělili všechny děti do skupin po 7. Když je později chtěli rozdělit po 8, tak to nešlo. Kolik dětí bylo na výletě?[1]

Kontext úlohy je žákům 4.–6. ročníku blízký. Úloha obsahuje různé komplikující jevy, a to matematické (práce s intervalem *více než*, *méně než*, práce s logickými spojkami *ale*, nutnost práce se čtyřmi podmínkami, které je třeba splnit zároveň [více než 55, méně než 65, lze rozdělit po 7, nelze rozdělit po 8]) a jazykové (neurčitost *více než*, *méně než*, negace *nešlo*, spojka *ale*, kterou je nutno interpretovat logicky [a zároveň], souvětí).

Příprava před hodinou

Pomůcky: počítadla, nevybarvená stovková tabulka každému žákovi, krejčovský metr, hromada cca 70 fazolí (kaštanů, víček nebo jiných manipulativ), čtverečkované papíry. Tyto pomůcky učitel žákům ve vhodný okamžik nabídne k použití.

Společná práce s textem úlohy

Porozumění textu úlohy	Rozvoj jazykové gramotnosti
1. Zodpověz postupně všechny otázky. a) Kolik žáků mohlo být na výletě, když víme, že jich bylo více než 55? b) Kolik žáků mohlo být na výletě, když víme, že jich bylo méně než 65? c) Kolik žáků mohlo být na výletě, když víme, že jich bylo více než 55 a současně méně než 65? Vypiš všechny možnosti.	8. Kolik vedoucích bylo na výletě? Podle čeho to v textu poznáš? 9. (pro 6. roč.) Kterým slovním druhem je slovo *vedoucí* v této úloze? Kterým jiným slovním druhem může být slovo *vedoucí*? Napiš větu, v níž bude slovo *vedoucí* jiným slovním druhem, než je v této slovní úloze.
2. Marek řekl: *Tak na výletě mohlo být přesně 55 žáků.* Má Marek pravdu? Svou odpověď zdůvodni.	10. Doplň i/y do věty: a) *Děti rozdělil__ své vedoucí do skupin.* b) *Vedoucí rozdělil__ své děti do skupin.*

[1] Úloha byla vytvořena na základě úlohy TIMSS 2007 (Tomášek, V. et al. [2009, s. 23]. *Výzkum TIMSS 2007. Úlohy z matematiky pro 8. ročník*. Ústav pro informace ve vzdělávání).

3. Vyjádři jinými slovy spojení *méně než 65.*

4. Vyjádři jinými slovy:

a) Žáci byli rozděleni do skupin po 7.
b) Žáci byli rozděleni do 7 skupin.

5. Co znamená, že děti nešlo rozdělit do skupin po osmi? Jak tuto skutečnost vyjádříš matematicky?

6. Které z následujících tvrzení je jinými slovy přímo napsáno v textu úlohy?

a) Děti bylo možné rozdělit do sedmi skupin.
b) Děti bylo možné rozdělit do osmi skupin.
c) Děti bylo možné rozdělit do skupin po sedmi.
d) Děti bylo možné rozdělit do skupin po osmi.

7. Napiš všechny podmínky, které musíš znát pro určení správného počtu dětí na výletě.

11. Větu *Na výletě bylo více než 55 dětí.* přeformuluj tak, aby se zachoval její význam, a přitom začínala slovy: *Na výletě nebylo …*

Řešení

(1) a) 56, 57, 58, … b) …, 62, 63, 64. c) 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64. **(2)** Marek nemá pravdu , protože žáků muselo být více než 55, tedy ne 55. **(3)** Například: ne více než 64, 64 a méně, nejvýše 64. **(4)** a) Žáci byli rozděleni do skupin a v každé skupině bylo 7 žáků. b) Žáci byli rozděleni do skupin a těch bylo 7. **(5)** Když se žáci dělili do skupin po 8, tak někdo zbyl, nebo některá skupina byla neúplná. Například: Počet dětí nebyl dělitelný osmi. **(6)** c) **(7)** Jsou to čtyři podmínky: 1. žáků bylo více než 55, 2. žáků bylo méně než 65, 3. počet žáků je dělitelný 7, 4. počet žáků není dělitelný 8. **(8)** Není z textu zřejmé, ale určitě byli aspoň dva. **(9)** Podstatné jméno versus přídavné jméno – Vedoucí závodník dobíhal do cíle. **(10)** a) -y. b) -i. **(11)** Například: *Na výletě nebylo ani méně než 56, ani více než 64 dětí.*

Přehled a rozbor jednotlivých nedokončených řešitelských strategií

Strategie A_Alena (Tabulka 0–99)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Alena: *Já jsem si do tabulky 0–99 vyznačila žlutě všechna čísla, která jdou vydělit 7 beze zbytku. Pak modře všechna čísla, která jdou vydělit 8 beze zbytku. Pak jsem vyznačila červeným rámečkem čísla, která jsou větší než 55, ale menší než 65. A pak už to bylo jasné.*

Alena využila stovkovou tabulku 0–99, která je strukturovaným zápisem přirozených čísel první stovky. Pravděpodobně využila svých dřívějších zkušeností, když v tabulce vyznačovala jisté násobky. Mohla být zaujata tím, že vznikaly zajímavé vzory, pravidelnosti. Začala tedy vybarvovat čísla – žlutě ta, která lze dělit sedmi, a modře ta, která lze dělit osmi. Po vybarvení čísel lze vidět jistou pravidelnost. Po vyznačení intervalu (55, 65) červeným rámečkem lze vidět výsledek – žluté číslo v rámečku. Protože Alena pracovala jen s čísly a skupiny dětí na výletě nijak nemodelovala, v její mysli došlo zřejmě k desémantizaci a vytvoření čistě matematického modelu situace.

Očekáváme, že žáci zaměří pozornost na červený rámeček, který vyznačuje podmínku, že dětí na výletě bylo více než 55 a méně než 65. V červeném rámečku najdou čísla, která jsou vybarvena žlutě (jsou dělitelná sedmi), ale ne modře (nejsou dělitelná osmi). V rámečku je jedno číslo zelené (56), které vzniklo vybarvením jak žlutou, tak modrou. To ale znamená, že je dělitelné jak sedmi, tak osmi, což nevyhovuje podmínkám úlohy. Výsledek je tedy pouze číslo 63.

Strategie B_Beáta (Výpočet)

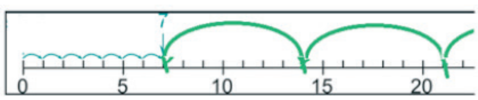
Beáta: *Abych mohla rozdělit děti do skupin po 7, tak jsem dělila sedmičkou čísla 56, 57, 58, ..., 62, 63, 64. Pak jsem vzala jen ta čísla, kde jsem nedostala žádný zbytek, aby nezbyl žádný žák. A pak je to už jasné.*

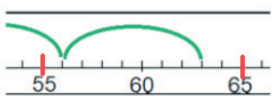
Beáta přiřadila situaci, která je sémantická, *matematický model*, tzn. v intervalu čísel (více než 55, méně než 65) hledala násobky 7 (počty dětí ve skupinách po 7).

Očekáváme, že žáci provedou to, co Beáta navrhovala, tedy budou postupně dělit všechna čísla v daném intervalu číslem 7. Vyberou ta, která vyjdou beze zbytku, tedy čísla 56 a 63. Tato dvě čísla pak budou dělit číslem 8 a vyloučí to, které vyjde beze zbytku. Tedy jako řešení vyjde 63, protože není dělitelné osmi.

Strategie C_Cyril (Číselná osa)

Cyril: *Já jsem si na číselné ose vyznačil čísla 55 a 65. Pak jsem dělal skoky po 7, až jsem překročil 55, vyznačil jsem číslo 56 a zastavil se na čísle 63. Tedy jsem našel dvě čísla, která by mohla být řešením a pak jsem…*

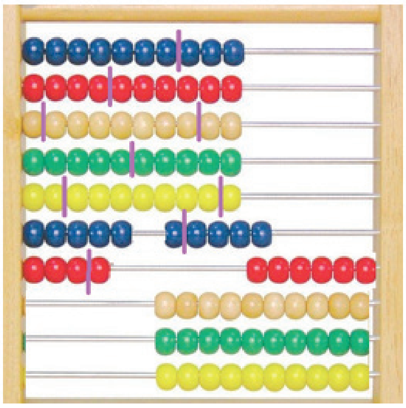




Cyril vizualizoval situaci číselnou osou s vyznačenými „skoky“ po 7. Došlo tedy k transformaci významu čísla. Číslo jako počet (skupiny po sedmi) Cyril transformoval do čísla jako veličiny (délka skoku je 7). Jedno dítě je reprezentováno jedním malým skokem a skupina sedmi dětí je reprezentována velkým skokem délky 7 (jednotek na číselné ose). Model je *procesuální*. Cyril si na číselné ose znázornil pomocí skoků po 7 všechna čísla dělitelná sedmi a zastavil se na čísle 63, protože dalším skokem by již přesáhl číslo 65. Dvě Cyrilova řešení jsou dvě vyznačená čísla 56 a 63 v intervalu 55 až 65.

Očekáváme, že žáci prověří dvě Cyrilova řešení a dokončí řešení zajištěním čtvrté podmínky, tj. zjištěním, které z těchto dvou čísel není dělitelné osmi neboli při dělení osmi dává nějaký zbytek. Vyloučí tak číslo 56. Žáci mohou také reprodukovat postup Cyrila a pomocí skoků po osmi zjistit, že z daného intervalu nesmí vybrat čísla 56 a 64. Tedy číslo 63 je počet dětí na výletě – můžeme je rozdělit do devíti skupin po sedmi, ale do skupin po osmi tento počet dětí rozdělit nelze.

Strategie D_Dan (Manipulace)

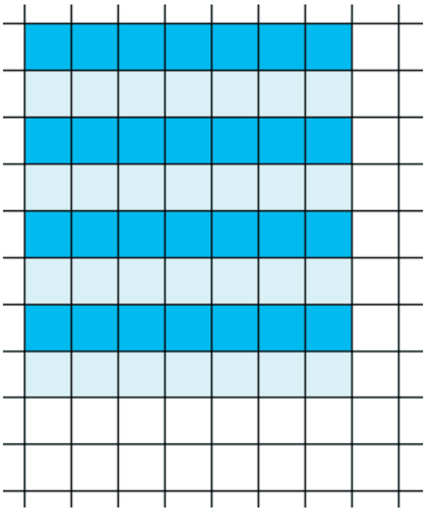


Dan: *Já jsem využil počítadla. Oddělil jsem si 64 kuliček, a ještě jsem si v těch 64 udělal mezeru mezi 55 a 56 kuličkami. A potom jsem dělal malými mezerami skupinky po sedmi, jako kdyby to byly děti. A pak už jsem viděl výsledek.*

Dan reprezentoval jedno dítě jednou kuličkou na počítadle. Jedná se o vizuální manipulativní model. Kuličky na počítadle oddělené mezerami vytvářejí k úloze situační model, který je strukturovaný. Podobný (ale nestrukturovaný) model by mohl být vytvořen pomocí jiných manipulativ, např. fazolí. Dan si dvěma většími mezerami oddělil interval čísel 56 až 64, dále malými mezírkami odděloval skupinky po sedmi. Zjistil, že ve vyznačeném intervalu mu vyšla dvě čísla, která jsou dělitelná sedmi. Jsou to čísla 56 a 63.

Očekáváme, že zde budou žáci pokračovat tak, že prověří, které z těchto čísel není dělitelné číslem 8. Je to číslo 63. Pokud žák číslo 56 nebude hned umět zpaměti vydělit osmi, vyznačí 56 kuliček na počítadle a bude je oddělovat mezírkami po osmi (nebo vezme 56 fazolí a bude dělat skupinky po osmi). Vyjde mu, že je to možné. Stejně postupuje u čísla 63, a to již odpovídá podmínkám úlohy.

Strategie E_Eva (Čtverečkovaný papír)



Eva: *Nejdříve jsem si to chtěla vymodelovat pomocí víček, ale neměla jsem jich dost. Tak jsem si vzala čtverečkovaný papír a na něm jsem si začala vyznačovat obdélník sestavený z řad čtverečků po 7. Přikládala jsem je k sobě tak dlouho, dokud jsem nepřekročila celkový počet 55 čtverečků. Spočítala jsem pak počet řad a už mi to bylo jasné …*

Eva situaci vizualizovala 2D geometrickým modelem. Neuspořádanou množinu dětí přetransformovala nejdříve do víček a pak víčka do grafické podoby čtverečků. Ty pak uspořádala do řad po sedmi a dostala obdélník, který je tvořen *x* řadami čtverečků po sedmi. Ten reprezentoval číslo dělitelné jak sedmi, ale také číslem *x*. Eva reprezentuje osmou řádkou číslo 56 (počet čtverečků v obdélníku), ale toto číslo je evidentně dělitelné osmi (osm řádků neboli sloupce po osmi čtverečcích).

Očekáváme, že žáci si uvědomí, že je nutné přidat ještě devátý řádek, kde již vidí další číslo, 63, které určitě není dělitelné osmi, ale je dělitelné sedmi a je menší než 65. Přiložením dalšího řádku čtverečků by již žáci přesáhli číslo 65, tedy je nutné skončit devátým řádkem. Výsledek je číslo 63 jako počet dětí v devíti skupinách po sedmi.

Můžeme říci, že u této úlohy převažovala oblíbenost strategie Aleny (*jsem jí rozuměl; to bylo celkem jednoduché; nám připadala logická; je lehká; se nám nejlépe počítala.*) a pak Beáty (*byla jednoduchá; je to nejjednodušší způsob*). I strategie Cyrila byla některými označena jako nejoblíbenější (*líbí se nám počítat se skákáním*). Zajímavé je, že mnozí, kteří označili strategii Aleny za nejoblíbenější, by příště použili strategii Beáty, nebo Cyrila. Zajímavé je, že v rámci jedné třídy některý žák/skupinka žáků píše, že by nikdy nepoužili strategii Cyrila a jiní žáci naopak; nebo měli někteří problém porozumět strategii Beáty (*protože jsme ji nepochopili*) a jiní by jí příště dali přednost.

Návazná práce – další úlohy

Učitel žákům předloží další úlohu a doporučí jim, jakou strategií ji mají řešit. Kromě zde nabídnutých může využít i těch, které vymysleli žáci (pokud žáci úlohu nejdříve sami řešili). V závorce je u každé úlohy uveden výsledek a doporučené strategie.

Úloha 1.

Žáci jsou rozděleni na dvě skupiny – tleskači a dupači. Učitel odříkává řadu čísel od jedné a dupači dupnou na každé páté číslo a tleskači tlesknou na každé šesté číslo. Když učitel skončil počítání, tleskači tleskli, ale dupači nedupli. Víme, že učitel určitě vyslovil číslo 25, ale číslo 40 už ne. Do jakého čísla učitel počítal?

[Výsledek: 36. Strategie: A_Tabulka 0–99, C_Číselná osa]

Úloha 2.

Nakresli takový obdélník na čtverečkovaném papíru, který má obsah větší než 55 a menší než 65 čtverečků. Délka jedné strany obdélníku je 7 dílků (jednotkových úseček). Urči délku druhé strany, když víš, že se nerovná 8 (dílkům).

[Výsledek: 9 dílků (jednotkových úseček). Strategie: E_Čtverečkovaný papír]

Úloha 3.

Myslím si číslo, které je větší než 40 a menší než 50. Lze ho dělit 7, ale nelze ho dělit 6.

[Výsledek: 49. Strategie: A_Tabulka 0–99, B_Výpočet, D_Manipulace]

Úloha 4.

Harry měl šestimílové boty a Hermiona měla sedmimílové. Oba ušli vzdálenost větší než 40 a menší než 50 mil. Kam došel Harry, když víš, že se nesetkal s Hermionou?

[Výsledek: Na 48. míli. Strategie: A_Tabulka 0–99, B_Výpočet, C_Číselná osa]

Úloha 5.

Plánujeme trasu našeho celodenního výletu na kole. Chceme, aby byla delší než 55 km, ale kratší než 65 km. Víme, že na trase se na každém sedmém kilometru nachází kemp a na každém osmém kilometru rybník. Jak dlouhá bude naše trasa, když chceme skončit v kempu, který není u rybníka?

[Výsledek: 63 km. Strategie: A_Tabulka 0–99, B_Výpočet, C_Číselná osa]

Úloha 6.

Uhodni, kolik mi je let. Od mého narození jezdíme každý třetí rok na hory do Alp a každý čtvrtý rok k moři. Už mi bylo 22, ale 32 ještě ne. Letos pojedeme na hory a k moři hned příští rok.

[Výsledek: 27. Strategie: A_Tabulka 0–99, B_Výpočet, C_Číselná osa]

Pracovní list 1 k úloze Výlet

Na výletě bylo více než 55, ale méně než 65 dětí. Vedoucí nejdříve rozdělili všechny děti do skupin po 7. Když je později chtěli rozdělit po 8, tak to nešlo. Kolik dětí bylo na výletě?

Dokončete následující řešení Aleny, Beáty a Cyrila.

Strategie Alena

ALENA: *Já jsem si do tabulky 0–99 vyznačila žlutě všechna čísla, která jdou vydělit 7 beze zbytku. Pak modře všechna čísla, která jdou vydělit 8 beze zbytku. Pak jsem vyznačila červeným rámečkem čísla, která jsou větší než 55, ale menší než 65. A pak už to bylo jasné.*

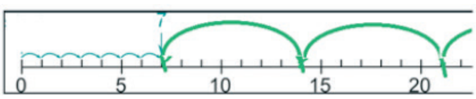
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

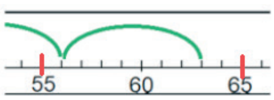
Strategie Beáta

BEÁTA: *Abych mohla rozdělit děti do skupin po 7, tak jsem dělila sedmičkou čísla 56, 57, 58, ..., 62, 63, 64. Pak jsem vzala jen ta čísla, kde jsem nedostala žádný zbytek, aby nezbyl žádný žák. A pak je to už jasné.*

Strategie Cyril

CYRIL: *Já jsem si na číselné ose vyznačil čísla 55 a 65. Pak jsem dělal skoky po 7, až jsem překročil 55, vyznačil jsem číslo 56 a zastavil se na čísle 63. Tedy jsem našel dvě čísla, která by mohla být řešením a pak jsem...*





Evaluační dotazník B

Názvy strategií, které jste ve skupině dokončovali: ______________________________

Ze všech strategií se mi nejvíce líbila strategie s názvem ______________, protože ____________

____.

Překvapila mě strategie s názvem ______________, protože ______________________.

Měl/a jsem problém porozumět strategii s názvem ______________.

Nikdy bych nepoužil/a strategii s názvem ______________, protože ____________________.

Příště bych asi použil/a strategii s názvem ______________.

Napadla mě ještě jiná strategie: ANO / NE. Popíšu ji:

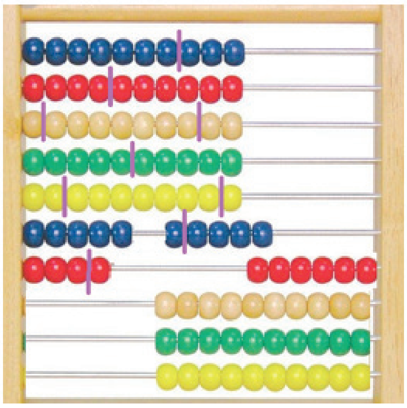
Pracovní list 2 k úloze Výlet

Na výletě bylo více než 55, ale méně než 65 dětí. Vedoucí nejdříve rozdělili všechny děti do skupin po 7. Když je později chtěli rozdělit po 8, tak to nešlo. Kolik dětí bylo na výletě?

Dokončete následující řešení Dana a Evy.

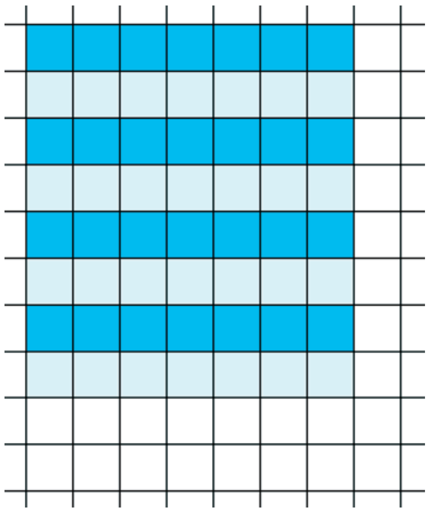
Strategie Dan

DAN: *Já jsem využil počítadla. Oddělil jsem si 64 kuliček, a ještě jsem si v těch 64 udělal mezeru mezi 55. a 56. kuličkou. A potom jsem dělal malými mezerami skupinky po sedmi, jako kdyby to byly děti. A pak už jsem viděl výsledek.*



Strategie Eva

EVA: *Nejdříve jsem si to chtěla vymodelovat pomocí víček, ale neměla jsem jich dost. Tak jsem si vzala čtverečkovaný papír a na něm jsem si začala vyznačovat obdélník sestavený z řad čtverečků po 7. Přikládala jsem je k sobě tak dlouho, dokud jsem nepřekročila celkový počet 55 čtverečků. Spočítala jsem pak počet řad a už mi to bylo jasné …*



Metodický list k úloze Supermarket

7. až 9. ročník — Téma: přímá úměrnost

Z hygienických důvodů byla v době pandemie covid-19 nastavena v supermarketech nová pravidla. Jedno z pravidel znělo:
Na 24 m² nesmí být v průměru nikdy více než 5 zákazníků.
Místní supermarket má rozlohu 840 m². Vedoucí supermarketu se rozhodli, že tento požadavek splní tím, že omezí počet košíků a vydají příkaz, že každý zákazník si musí vzít jeden košík. Kolik košíků maximálně mohou v prodejně pro zákazníky nachystat?

Úloha je formulována v kontextu doby, kdy se musela dodržovat hygienická opatření. Úloha obsahuje komplikující parametry. Mezi matematické patří práce s číslem jako veličinou (rozloha obchodu a omezující podmínka na počet zákazníků), práce s číslem jako počtem (zákazníků/košíků), pojem průměr a kvantifikátory (*maximálně, každý*). Z jazykového hlediska je úloha komplikována negací (*nesmí být … nikdy více než…*), vyjádřením korelace mezi zákazníky a košíky (*každý zákazník si musí vzít jeden košík*) a složitým souvětím.

Společná práce s textem slovní úlohy

Porozumění textu úlohy	Rozvoj jazykové gramotnosti
1. Jakým způsobem se v místním supermarketu rozhodli dodržovat pravidlo uvedené v úloze?	6. Označ slova, která považuješ za slova cizí a za slova přejatá. Vysvětli jejich význam.
2. Najdi ještě jiný způsob, jak by mohlo být toto pravidlo dodržováno.	7. Nahraď slovo *maximálně* českým synonymem.
3. Řekni: a) Jaká je přibližně rozloha tvého pokoje? Je větší, či menší než 24 m²? b) Který ze supermarketů v okolí má podle tebe podobnou rozlohu jako supermarket z úlohy?	8. Změní se význam složitého souvětí v textu, když vynecháš druhou větu vedlejší?

4. Rozhodni o každém z tvrzení, zda jednoznačně vyplývá z textu.

a) V místním supermarketu nesmí být nikdy víc než 5 zákazníků najednou.
b) V místním supermarketu smí být najednou více než 5 zákazníků.
c) Počet zákazníků, kteří mohou být v supermarketu najednou, je závislý na rozloze supermarketu.
d) Zákazníci bez nákupního košíku mohou v supermarketu nakupovat bez omezení.

5. Pokus se text co nejvíce zkrátit tak, aby nebyly ztraceny informace potřebné k vyřešení úlohy a aby si text zachoval smysl.

Řešení

(1) Omezením počtu košíků, každý zákazník musí mít jeden košík a pokud už košíky nejsou k dispozici, je naplněna kapacita obchodu a žádný další zákazník nesmí do obchodu vstoupit. **(2)** Např. by se zákazníci mohli počítat nějakým automatickým systémem. **(3)** Otevřená úloha. **(4)** a) Ne, b) ano, c) ano, d) ne. **(5)** Na 24 m^2 nesmí být v průměru nikdy více než 5 zákazníků. Místní supermarket má rozlohu 840 m^2. Každý zákazník si musí vzít jeden košík. Kolik košíků maximálně mohou v prodejně pro zákazníky nachystat? **(6)** Hygienických, přídavné jméno od slova hygiena – opatření zabezpečující ochranu zdraví, pandemie – hromadný výskyt infekčního onemocnění lidí bez prostorového omezení, covid – onemocnění způsobené koronavirem, supermarket – velká samoobsluha s prodejem potravinářského někdy i drobného průmyslového zboží, maximálně – nanejvýš. **(7)** Nanejvýš, nejvíce, nejvýše. **(8)** Nezmění.

Přehled a rozbor jednotlivých nedokončených řešitelských strategií

Strategie A_Alice (Dlouhá tabulka)

Alice: *Já jsem si udělala takovouto tabulku a z ní jsem řešení snadno dostala:*

rozloha (m^2)	*24*	*48*	*72*						
počet lidí	*5*	*10*	*15*						

Alice si vypracovala dlouhou tabulku (strategie procesuální, výčet všech případů), do které postupně zapisovala, kolik zákazníků by mohlo být v prodejně, kdyby prodejna měla rozlohu 24 m^2, 48 m^2, 72 m^2, … S takovou tabulkou se žáci setkávají, když se seznamují s přímou úměrností. Alice ještě neumí zapsat přímou úměrnost pomocí trojčlenky. Jedná se o pracný, ale srozumitelný procesuální způsob řešení.

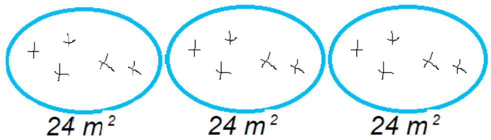
Očekáváme, že žák bude doplňovat tabulku tak dlouho, dokud nedosáhne v horním řádku čísla 840 (m^2). Doplní 32 sloupečků. Modře je vyznačena očekávaná práce žáka.

rozloha (m^2)	24	48	72	96	120	...	792	816	840
počet lidí	5	10	15	20	25	...	165	170	**175**

Výsledkem je v dolním řádku číslo 175 v posledním sloupečku tabulky, což je maximální počet zákazníků, a tedy i nachystaných košíků.

Strategie B_Boris (Balíčky)

Boris: *Já jsem si udělal takové balíčky. Každý z nich má 24 m² a do toho jsem si dělal vždy 5 křížků. Pak už mi bylo jasné, že mám nejdříve dělit a pak…*



Boris vizualizoval rozlohu 24 m² pomocí oválů (balíčků) a zákazníky pomocí křížků. Do každého balíčku zakreslil 5 zákazníků. Stačilo mu nakreslit tři balíčky a bylo mu zřejmé, že musí udělat tolik balíčků, aby pokryl 840 m². To znamená, že přišel na to, že počet balíčků dostane, když vydělí 840 : 24 = 35.

Očekáváme, že žák odhalí, že se nejdříve musí celková rozloha obchodu 840 m² dělit velikostí balíčků, tedy 24 m². Tím zjistí počet balíčků, tj. 840 : 24 = 35. Toto číslo pak násobí počtem zákazníků v jednom balíčku, tedy 35 · 5 = 175. Výsledný maximální počet zákazníků v obchodě je 175, resp. počet košíků, které mohou být pro zákazníky nachystány.

Strategie C_Cecilka (Počítání přes jednotku)

Cecilka: *Já jsem si vydělila 24 pěti, a abych dostala správný výsledek, tak jsem znovu dělila …*

Cecilka pracuje pouze s čísly. Číslo 24 vydělila 5, aby zjistila, kolik metrů čtverečních je potřeba na jednoho zákazníka neboli počítala přes jednotku (jak se to dělává při počítání procent). Je to 4,8 m² na jednoho zákazníka.

Očekáváme, že žák si uvědomí, že známe počet metrů čtverečních na jednoho zákazníka a známe počet metrů čtverečních jako rozlohu obchodu, je tak potřeba dělit: 840 : 4,8 = 175. To je správná odpověď. Žáci provedou *sémantickou zkoušku*, kterou prověří správnost strategie.

Strategie D_Dana (Krátká tabulka)

Dana: *Já jsem si udělala tuto tabulku:*

m²	*počet lidí*
24	*5*
48	*10*
72	***15***
96	*20*
120	***25***

Z toho je už vše jasné. Mám v tom prvním sloupci číslo 72 a k tomu číslu 840 je blízké číslo 10 · 72, tj. 720 m^2, a k tomu jsem potřebovala ještě připočítat 120 m^2. To jsem zaznamenala do dalších řádků tabulky.

Dana se zorientovala ve struktuře čísel v krátké tabulce (strategie s rychlým přechodem k odhalení vazby) a poznala, že v levém sloupci tabulky jsou násobky čísla 24. Vzala číslo 720 jako pěkný desetinásobek čísla 72, který je také násobkem 24 a navíc je blízký k číslu 840. K číslu 720 již potřebovala připočítat jenom 120, což je poslední doplněný údaj v tabulce.

Očekáváme, že žák podle slovního popisu Dany doplní řádek 720 a vedle toho bude 150 (10 · 15). Poslední řádek tabulky bude 840 (720 + 120) a vedle toho bude 175 (150 + 25).

Strategie E_Emil (Tabulka s jinou vazbou)

Emil: *Já jsem si udělal tuto tabulku:*

m^2	*počet lidí*
24	*5*
48	*10*
72	*15*
96	*20*
120	*25*

Řekl jsem si, že stačí těch 120 vynásobit 7, abych dostal 840, a pak je vše jasné.

Emil si podobně jako Dana všiml struktury čísel v krátké tabulce a využil vazby mezi posledním číslem 120 a konečným číslem 840. Zjistil, že 840 je sedminásobek čísla 120.

Očekáváme, že žák pouze realizuje to, co Emil říká, i v druhém sloupci tabulky. Když 840 je sedminásobek čísla 120, tak počet lidí musí být také sedminásobek posledního čísla v tabulce, tedy 7 · 25, což je 175.

m^2	počet lidí
24	5
48	10
72	15
96	20
120	25
840 (7 · 120)	175 (7 · 25)

U úlohy Supermarket u žáků jednoznačně převažovala oblíbenost práce s tabulkou ve strategii Alice. Z 58 žáků 7. a 9. roč. jedné školy ji zvolilo 43 žáků (*jsem ji jedinou pochopila; jsem dospěla k výsledku, hned ukázala výsledek; mě to baví a je hezká; je to postup, který je pro mě nejkomfortnější; se mi líp počítá v tabulkách; byla nejlépe pochopitelná; je strašně jednoduchá; je efektivní; mi to dává smysl*). Jen několik jedinců zvolilo jinou strategii jako nejoblíbenější. Z uvedených 43 žáků jich 10 sdělilo, že by příště volili strategii Borise (4) nebo Cecilky (6). Domníváme se, že ti, kteří by příště volili strategii Cecilky, nejspíše dostali prostřednictvím tabulky od Alice dobrý vhled do úlohy a dál by ji zvládli řešit už jen výpočtem jako Cecilka.

Návazná práce – další úlohy

Učitel žákům předloží další úlohu a doporučí jim, jakou strategií mají úlohu řešit. Kromě zde nabídnutých strategií může využít i těch, které vymysleli žáci, pokud úlohu nejdříve sami řešili. V závorce je uveden výsledek a doporučené strategie.

Úloha 1.

Ježibaba zaklela prince v hrůzné chlupaté zvíře. Řekla mu, že jestliže chce vrátit svou lidskou podobu, musí užít přesně 1 100 kapek zázračného lektvaru. Ten byl uskladněn v malých baňkách o objemu 5 ml, což bylo přesně 74 kapek. Kolik mililitrů lektvaru si musí zakletý princ opatřit?

[Výsledek: 75 ml. Strategie: A_Dlouhá tabulka, B_Balíčky, C_Počítání přes jednotku, D_Krátká tabulka, E_Tabulka s jinou vazbou]

Úloha 2.

Ze 75 ml malinového koncentrátu připravíme 3 l šťávy. Kolik mililitrů koncentrátu potřebujeme na přípravu 15 litrů šťávy?

[Výsledek: 375 ml. Strategie: A_Dlouhá tabulka, B_Balíčky, C_Počítání přes jednotku, D_Krátká tabulka]

Úloha 3.

V receptu na ovocný koláč je uvedeno: Na jeden koláč pro 8 lidí je potřeba ¾ kg meruněk. V jídelně chtějí upéct koláč pro 400 žáků. Kolik kilogramů meruněk si mají v kuchyni opatřit?

[Výsledek: 37,5 kg meruněk. Strategie: A_Dlouhá tabulka, B_Balíčky, C_Počítání přes jednotku, D_Krátká tabulka, E_Tabulka s jinou vazbou]

Úloha 4.

Na oslavu přijde 80 hostů, budou sedět po 4 u každého stolu. Na každém stolu je miska s 250 g oříšků. Kolik gramů oříšků hostitel rozdělil na misky?

[Výsledek: 5 000 g oříšků. Strategie: A_Dlouhá tabulka, B_Balíčky, C_Počítání přes jednotku, D_Krátká tabulka, E_Tabulka s jinou vazbou]

Úloha 5.

Novákovi se rozhodli na svém poli o rozloze 0,75 ha pěstovat brambory. Doporučené množství sadbových brambor je 0,3 t na 1 ha pozemku. Z odborné literatury vyčetli, že maximální výnos je třicetinásobný. Kolik tun brambor maximálně vypěstují?

[Výsledek: 6,75 t brambor. Strategie: C_Počítání přes jednotku, D_Krátká tabulka, E_Tabulka s jinou vazbou]

Úloha 6.

Pro přípravu 10 palačinek je potřeba ¼ l mléka, 2 vejce a 150 g hladké mouky.

a) Jaké množství surovin si musí kuchař nachystat, když připravuje palačinky pro 40 dětí? Jedna porce budou tři palačinky.

b) Jaké množství surovin potřebujeme na přípravu palačinkového dortu ze 45 palačinek?

[Výsledek: a) 3 l mléka, 24 vajec, 1 800 g mouky. Strategie: C_Počítání přes jednotku, D_Krátká tabulka, E_Tabulka s jinou vazbou; b) Výsledek: 1,125 l mléka, 9 vajec, 675 g mouky. Strategie: E_Tabulka s jinou vazbou]

Pracovní list 1 k úloze Supermarket

Z hygienických důvodů byla nastavena v supermarketech nová pravidla. Jedno z pravidel znělo: *Na 24 m² nesmí být v průměru nikdy více než 5 zákazníků.*
Místní supermarket má rozlohu 840 m². Vedoucí supermarketu se rozhodli, že tento požadavek splní tím, že omezí počet košíků a vydají příkaz, že každý zákazník si musí vzít jeden košík. Maximálně kolik košíků mohou v prodejně pro zákazníky nachystat?

Dokončete následující řešení Alice, Borise a Cecilky.

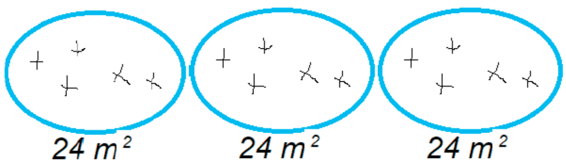
Strategie Alice

ALICE: *Já jsem si udělala takovouto tabulku a z ní jsem řešení snadno dostala:*

rozloha (m^2)	*24*	*48*	*72*						
počet lidí	*5*	*10*	*15*						

Strategie Boris

BORIS: *Já jsem si udělal takové balíčky. Každý z nich má 24 m² a do toho jsem si dělal vždy 5 křížků. Pak už mi bylo jasné, že mám nejdříve dělit a pak…*



Strategie Cecilka

CECILKA: *Já jsem si vydělila 24 pěti, a abych dostala správný výsledek, tak jsem znovu dělila…*

Evaluační dotazník B

Názvy strategií, které jste ve skupině dokončovali: ______________________________

Ze všech strategií se mi nejvíce líbila strategie s názvem ________________, protože ____________

____.

Překvapila mě strategie s názvem ________________, protože ____________________________.

Měl/a jsem problém porozumět strategii s názvem __________________.

Nikdy bych nepoužil/a strategii s názvem ________________, protože ______________________.

Příště bych asi použil/a strategii s názvem ________________.

Napadla mě ještě jiná strategie: ANO / NE. Popíšu ji:

Pracovní list 2 k úloze Supermarket

Z hygienických důvodů byla nastavena v supermarketech nová pravidla. Jedno z pravidel znělo: *Na 24 m² nesmí být v průměru nikdy více než 5 zákazníků.*
Místní supermarket má rozlohu 840 m². Vedoucí supermarketu se rozhodli, že tento požadavek splní tím, že omezí počet košíků a vydají příkaz, že každý zákazník si musí vzít jeden košík. Maximálně kolik košíků mohou v prodejně pro zákazníky nachystat?

Dokončete následující řešení Dany a Emila.

Strategie Dana

Dana: *Já jsem si udělala tuto tabulku:*

m²	*počet lidí*
24	*5*
48	*10*
72	***15***
96	*20*
120	***25***

Z toho je už vše jasné. Mám v tom prvním sloupci číslo 72 a k tomu číslu 840 je blízké 10 · 72, tj. 720 m², a k tomu jsem potřebovala připočítat 120 m². To jsem zaznamenala do dalších řádků tabulky.

Strategie Emil

Emil: *Já jsem si udělal tuto tabulku:*

m²	*počet lidí*
24	*5*
48	*10*
72	*15*
96	*20*
120	*25*

Řekl jsem si, že stačí těch 120 vynásobit 7, abych dostal 840, a pak je vše jasné.

Metodický materiál k úloze Myslím si číslo

3. až 5. ročník

Téma: propedeutika rovnic, zlomky

Myslím si číslo. Když od jeho třetiny odečtu třetinu čísla 27, dostanu 2. Které číslo si myslím?

Úloha není v pravém slova smyslu slovní úlohou, protože nemá (pseudo)reálný kontext. Poskytuje ale více možností situaci vizualizovat. Úlohu komplikují matematické a jazykové parametry. Je nutno vědět, jak se zjistí třetina ze známého čísla (27), ale také z neznámého čísla, kterým je myšlené číslo, a to bez opory o reálnou situaci. Zadání obsahuje antisignál – slovo *odečtu* signalizuje odčítání, ale v řešení je nutné provést operaci inverzní, sčítání. V úloze je dvakrát použito slovo třetina, ale pokaždé je myšleno z jiného celku.

Efektivní řešitelskou strategií této úlohy je *strategie „od konce“*. Náročnost této strategie spočívá v tom, že k výpočtu výsledku je potřeba použít operaci inverzní k naznačené operaci v textu úlohy. Proto je pro žáky náročné tuto strategii objevit.

Společná práce s textem úlohy

Porozumění textu úlohy	Rozvoj jazykové gramotnosti
1. Uveď příklad, co znamená *třetina čísla*.	4. (3. a 5. roč.) Napiš slovo *třetina* pomocí číslic.
2. Kdyby někdo tvrdil, že myšlené číslo je 15, nebo 60, uměl/a bys to ověřit?	
3. Zakroužkuj v textu úlohy slovo, ke kterému se vztahuje spojení *jeho třetiny* ve druhé větě.	

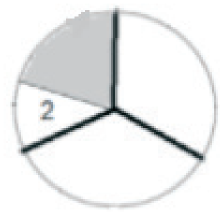
Řešení

(1) Např. třetina z 9 je 3, protože 3 + 3 + 3 = 9, můžeme ji zjistit tak, že 9 : 3 = 3. **(2)** Tvrzení můžeme ověřit výpočtem: (15 : 3) – (27 : 3) = –4, –4 ≠ 2; (60 : 3) – (27 : 3) = 11, 11 ≠ 2. Ani jedno tvrzení není pravdivé. **(3)** Slovo *číslo* v první větě. **(4)** 1/3.

Přehled a rozbor jednotlivých nedokončených řešitelských strategií

Strategie A_Alice (Koláč)

Alice: *Kdykoliv slyším úlohu o zlomku, nakreslím si pizzu. A pak všechno, co potřebuji, dobře vidím.*



Alice si znázornila neznámé číslo jako kruh/koláč/pizzu. K tomu se pravděpodobně rozhodla, když si všimla slova třetina. Zlomky se pomocí koláče vyznačují běžně. Alice si koláč podle zadání rozdělila na třetiny a od jedné z nich odebrala nějaké číslo – to je vyznačeno šedivě a zbytek je číslo 2.

Očekáváme, že si žák uvědomí, že šedivě zvýrazněná část je třetina z 27, tedy 9. To si vyznačí do obrázku. Z něj je již patrné, že 9 + 2 tvoří třetinu mysleného čísla. Myšlené číslo je 3 · 11 = 33.

Strategie B_Beáta (Úsečka)

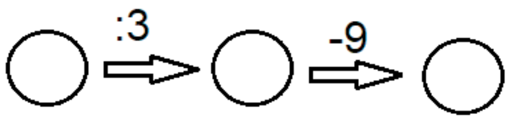
Beáta: *Já si nakreslím úsečku a na ni si vyznačím díly. Z toho je mi všechno jasné.*

Řešení Beáty je podobné jako řešení Alice. Celek vyznačila jako úsečku a tu rozdělila na třetiny, což zdůraznila slovem. Dále vyznačila, kolik z té jedné třetiny odebrala, tj. 9.

Očekáváme, že si žák uvědomí, že úsečka, která doplňuje úsečku označenou 9 do třetiny, reprezentuje číslo 2. Do obrázku žák doplní číslo 2 nad druhý kousek úsečky tvořící třetinu. Je hned vidět, že třetina hledaného čísla je 11, hledané číslo je tedy 33.

Strategie C_Cilka (Had)

Cilka: *Mně pomáhá had.*



Cilka si sdělení úlohy vizualizovala. Myšlené číslo označila prvním prázdným kolečkem. To nejdříve vydělila třemi, aby zjistila jeho třetinu, a mezivýsledek zapsala do druhého kolečka. Pak nad druhou šipku napsala, že od třetiny čísla bude odečítat třetinu z 27.

Dokončit strategii znamená doplnit číslo 2 do posledního kolečka a pak již řešit hada. Je zřejmé, že se bude řešit odzadu, a je tedy potřeba provádět inverzní operace. V prostředním kolečku vyjde 11, což je třetina z mysleného čísla. Myšlené číslo je 3 · 11, tedy 33.

Strategie D_Dan (Řešení odzadu)

Dan: *Já tyto úlohy řeším takhle a vždycky mi to vyjde. Vezmu dvojku, přičtu třetinu z 27 a pak vynásobím…*

Dan si vizualizoval proces řešení odzadu. Číslo 2 je to, co zbylo. K němu je třeba přičíst třetinu z 27. Tím dostaneme třetinu mysleného čísla.

Očekáváme, že si žák uvědomí, že jestliže v prostředním kolečku je 11, což je třetina mysleného čísla, musí ji násobit třemi, a tak dostane myšlené číslo 33.

Strategie E_Emil (Vhledem)

Emil: *To je jasné. Sečtu 27 a 6 a…*

Emil má hluboký vhled do situace. Pravděpodobně uvažoval takto: *Místo, abych odečetl třetinu z 27 od třetiny celku, tak můžu odečíst celých 27 rovnou od celku. V každé třetině po odečtení zbyde 2 a z celku zbyde 6.*

Dokončit strategii je již jednoduché. Žák sečte 27 a 6, dostane 33, a to je již konečný výsledek.

Z evaluačních dotazníků jedné třídy 6. ročníku plyne, že pouze strategie Dan nenašla svého zastánce. Nejvíce žáků nerozumělo právě této strategii. Zároveň nejvíce žáků překvapila a nejvíce žáků by si ji příště nevybralo (*je moc těžká*). Vysvětlujeme si to tím, že Dan postupoval odzadu, a tím se liší od Cilky, která použila stejné grafické schéma (had), ale postupovala v souladu s textem úlohy. Strategie Cilky byla v dané třídě nejoblíbenější a spolu se strategií Beáty by ji příště volilo nejvíce žáků. Každá strategie kromě strategie Alice někoho překvapila (B – *měla zvláštní způsob; nevychází; byla super;* C – *je jednoduchá; jsme ji nechápali*; D – *počítal v hadovi*; E – *byla zajímavá*). Je patrné, že znázornění zlomku pomocí „koláče“ nikoho nepřekvapí.

Návazná práce – další úlohy

Učitel žákům předloží další úlohu a doporučí jim, jakou strategií mají úlohu řešit. Kromě zde nabídnutých může využít i těch, které vymysleli žáci, pokud úlohu sami řešili. V závorce je výsledek a doporučené strategie.

Úloha 1.

Myslím si číslo.
a) Když k němu přičtu třetinu čísla 12, dostanu 22.
b) Když k jeho polovině přičtu 9, dostanu 22.
c) Když od jeho poloviny odečtu 9, dostanu 22.
d) Když k jeho polovině přičtu třetinu čísla 33, dostanu 22.
e) Když od něj odečtu jeho třetinu, dostanu 32.
f) Když k němu přičtu jeho třetinu, dostanu 32.

[Výsledek: a) 18, b) 26, c) 62, d) 22, e) 48, f) 24. Strategie: úlohy a), b), c) C_ Had, D_Řešení odzadu, E_Vhledem; úlohy d), e), f) A_Koláč, B_Úsečka, C_Had, D_Řešení odzadu, E_Vhledem.]

Úloha 2.

Škola zorganizovala na hřišti pro žáky 4. ročníku sportovní odpoledne. Všichni přišli a třetina z nich šla k aktivitě skákání v pytlích. Vedoucí této aktivity ale řekl: „Je vás tady moc. Pět z vás přijďte až za chvíli.“ Zůstalo tam 16 žáků. Kolik žáků přišlo na hřiště?

[Výsledek: 63. Strategie: A_Koláč, B_Úsečka, C_Had, D_Řešení odzadu, E_Vhledem]

Úloha 3.

Na misce byly koláče. Třetinu z nich snědl Tadeáš. Pak přišel Matěj a rozhodl se, že si vezme také třetinu, ale domníval se, že koláčů bylo původně na misce 24. Na misce pak zbyly už jen dva koláče. Kolik bylo původně koláčů na misce?

[Výsledek: 15. Strategie: A_Koláč, B_Úsečka, C_Had, D_Řešení odzadu, E_Vhledem]

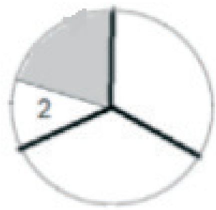
Pracovní list 1 k úloze Myslím si číslo

Myslím si číslo. Když od jeho třetiny odečtu třetinu čísla 27, dostanu 2. Které číslo si myslím?

Dokončete následující řešení Alice, Beáty a Cilky.

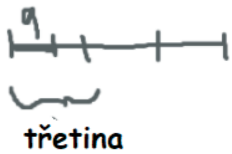
Strategie Alice

ALICE: *Kdykoliv slyším úlohu o zlomku, nakreslím si pizzu. A pak všechno, co potřebuji, dobře vidím.*



Strategie Beáta

BEÁTA: *Já si nakreslím úsečku a na ni si vyznačím díly. Z toho je mi všechno jasné.*



Strategie Cilka

CILKA: *Mně pomáhá had.*

Evaluační dotazník B

Názvy strategií, které jste ve skupině dokončovali: ______________________________

Ze všech strategií se mi nejvíce líbila strategie s názvem ________________, protože ____________

____.

Překvapila mě strategie s názvem ________________, protože ______________________.

Měl/a jsem problém porozumět strategii s názvem ________________.

Nikdy bych nepoužil/a strategii s názvem ________________, protože ________________.

Příště bych asi použil/a strategii s názvem ________________.

Napadla mě ještě jiná strategie: ANO / NE. Popíšu ji:

Pracovní list 2 k úloze Myslím si číslo

Myslím si číslo. Když od jeho třetiny odečtu třetinu čísla 27, dostanu 2. Které číslo si myslím?

Dokončete následující řešení Dana a Emila.

Strategie Dan

DAN: *Já tyto úlohy řeším takhle a vždycky mi to vyjde. Vezmu dvojku přičtu třetinu z 27 a pak vynásobím…*

Strategie Emil

EMIL: *To je jasné. Sečtu 27 a 6 a …*

Metodický materiál k úloze Kolik let je Honzíkovi?

2. až 3. ročník, 4. až 6. ročník, 7. až 9. ročník

Téma: dynamické slovní úlohy

Dnes jsou Aničce 2 roky. Až jí bude tolik let, kolik je dnes Honzíkovi, bude Honzíkovi 16 let. Kolik let je dnes Honzíkovi?

Úloha je dynamická (odehrává se ve dvou různých časech) a patří do skupiny slovních úloh o věku. Kontext úlohy není pro děti neznámý, jen mladší děti nemají s časovými jevy dostatek zkušeností. Úloha je komplikována prací s časem (příběh se odehrává ve dvou různých časech – *dnes* a *potom*, tzn. až bude Honzíkovi 16 let) a dvěma podmínkami, které je potřeba splnit zároveň (dnes jsou Aničce 2 roky a potom bude Honzíkovi 16 let). Žáci při řešení úlohy poznávají, nebo si zvědomují dva důležité časové jevy: (1) všichni stárnou stejně rychle, (2) věkový rozdíl dvou osob je stále stejný. Navíc se jedná o složenou úlohu se dvěma výpočty s nevyslovenou otázkou. Je třeba zjistit dobu, která uplynula mezi dvěma časy *dnes* a *potom*, ale otázka na tento údaj není zaměřena. Komplikací je i fakt, že jde o rovnost dvou údajů/věků, z nichž každý je v jiném čase (věk Aničky potom = věk Honzíka dnes). Úloha obsahuje také antisignál – je znám věk Honzíka po uplynutí jisté doby, což napovídá operaci sčítání; my se ale ptáme, kolik mu je dnes, tedy se v čase vracíme a odčítáme.

Z jazykového hlediska úloha obsahuje složité souvětí a běžně neužívaný obrat *tolik*, *kolik*.

Před realizací úlohy doporučujeme s žáky otevřít diskusi vedenou otázkami: *Kolik je ti let? Kolik let je tvému sourozenci? Je mladší nebo starší? O kolik let? Kolik ti bude let, až tvůj sourozenec zestárne o 1, 2, 3, … roky? Kolik bude tvému sourozenci, až tobě bude 30 let?*

Společná práce s textem úlohy

Porozumění textu úlohy	Rozvoj jazykové gramotnosti
1. Vyjmenuj z textu všechny osoby a řekni, co o nich víš.	5. V textu úlohy se třikrát opakuje totéž příslovce. Nahraď jej jiným výrazem tak, aby text úlohy byl stylisticky bohatší, ale zároveň se nezměnil jeho smysl.
2. Řekni vlastními slovy, o čem úloha je.	

3. Pokuste se k úloze zorganizovat divadelní scénku.	6. Jaký základní slovní tvar má slovní tvar *let*? Najdi toto slovo v některém z výkladových slovníků češtiny a zdůvodni, proč je v textu úlohy použito.
4. (9. roč.) Formuluj samostatně podobnou úlohu, zapoj tobě blízký kontext.	

Řešení

(1) Např. Aničce jsou 2 roky, Honzík je starší než Anička, za několik let bude Anička stejně stará jako Honzík dnes. **(2)**, **(3)**, **(4)** Otevřené úlohy. **(5)** Dnes / nyní / teď / v tento den. **(6)** Léto – ve významu rok, používáno zpravidla v množném čísle léta / roky.

Příprava pracovních listů

Tato úloha je rozpracována pro tři různé úrovně. Pro 2. a 3. ročník nabízíme strategie A, B, pro 4. až 6. ročník strategie A, B, C, D a pro 7. až 9. ročník strategie C, D, E.

V případě využití úlohy v 7. až 9. ročníku doporučujeme zvětšit čísla a rozdíl mezi nimi, např. 14 a 32, nebo 31 a 57.

Přehled a rozbor jednotlivých nedokončených řešitelských strategií

Strategie A_Alena (Sehrávka a tabulky)

Alena: *Já tu úlohu řeším tak, že si s bratrem zahraju, jak utíká čas. Položili jsme si na zem za sebou čísla 1, 2, …, 16, 17, 18. Ta čísla jsme brali tak, že to je věk Aničky nebo Honzíka. Já jsem hrála Aničku a postavila jsem se na dvojku. Bratr hrál Honzíka, ale nevěděli jsme, kam se má postavit. Tak jsme to odhadli a postavil se na číslo 6. Pak jsme hráli na „plynutí času". Já jsem řekla, že jsem zestárla o 1 rok a udělala jsem 1 krok na 3 a bratr udělal 1 krok na 7. Tak jsme pokračovali. Ale tenhle pokus nám nevyšel. Celý pokus jsme opakovali tak, že jsme měnili odhadnutý věk Honzíka. Pro jistotu jsme si to zapisovali. A nakonec nám to vyšlo.*

Pokus 1	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	
věk Aničky	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Anička je stejně stará, jako byl Honzík na začátku.*
věk Honzíka	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*Honzíkovi není 16 let.*

Pokus 2	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	
věk Aničky	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Anička ještě není stejně stará, jako byl Honzík na začátku.*
věk Honzíka	*12*	*13*	*14*	*15*	***16***	*Honzíkovi je 16.*

Pokus 3	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*						
věk Aničky	*2*	*3*	*4*	*5*	***6***						
věk Honzíka											

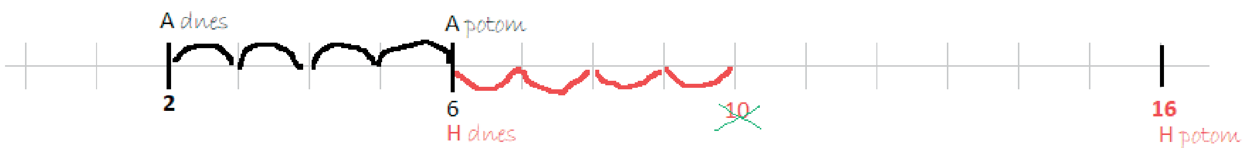
Alena překonala obtíž, že si neuměla představit, jak běží čas do budoucna, tím, že si situaci sehrála. (Toto je důležitý metakognitivní poznatek. Když si neumím představit proces, tak si ho sehraji. Sehrávku eviduji.) Evidence dat tabulkou je žákům nabídnuta, protože se jedná o celkem náročnou práci s daty, což není cílem úlohy. Jde jen o to, aby průběh času byl zviditelněný a zachycený. Pozorováním pohybu dětí po číselné ose a pak tabulky žáci vnímají, že obě děti stárnou stejně rychle.

Popis strategie Aleny je dlouhý, a tím je náročný, proto dáváme učiteli na zvážení, do jaké míry žákům pomůže. Překonávání obtíží ve čtení by žákům mohlo odčerpat příliš mnoho kognitivní energie.

Očekáváme, že žáci zaměří pozornost na zrychlený průběh času zaznamenaný tabulkou a po dvou třech pokusech jim již bude stačit tvořit jen tabulku. Popsaná strategie je *pokus – ověření – korekce* realizovaná sehrávkou. Dva pokusy jsou popsané a na žácích je, aby v těchto pokusech pokračovali, dokud nenajdou řešení, že Honzíkovi je dnes 9 let. *Sémantická zkouška* probíhá tak, že Anička stojí na čísle 2 a Honzík na čísle 9, ve stejném rytmu udělají postupně kroky po číselné ose, až se Anička dostane na 9 a Honzík ve stejnou chvíli na 16. Je to 7 kroků, uplyne tedy 7 let.

Strategie B_Blanka (Časová osa)

Blanka: *Já jsem si nakreslila časovou osu, podobnou jako máme nakreslenou na chodbě ve škole. Protože jsou Aničce dneska 2 roky, tak jsem si u čísla 2 napsala A dnes. Pak jsem si za každý rok udělala jednu čárku a u 16 jsem si napsala H potom. Pak už jsem začala zkoušet. Když jako uplynul 1 rok, tak jsem si udělala u Aničky a Honzíka oblouček k další čárce. V prvním pokusu jsem zvolila, že Honzíkovi je 6 let. Ten mi nevyšel, protože Honzíkovi bylo potom jen 10 let, ale má mu být 16. Takhle jsem pokračovala, až mi to vyšlo.*



Blanka využila faktu, že data historických událostí se dají znázornit na časové ose. (Toto je důležitý metakognitivní poznatek – události, které plynou v čase, se dají uspořádat a vizualizovat na časové ose.) Blanka řešila problém procesuálně a za každý uplynutý rok udělala oblouček u obou aktérů. Výsledkem je obrázek, který dává ihned informaci o tom, kolik let uplynulo, kolik let je Honzíkovi a jestli dosáhl 16 let. Získáváme také rychlou vizuální informaci o tom, že obě děti stárnou stejně rychle a že jejich věkový rozdíl se časem nemění.

Očekáváme, že žáci využijí časové osy od čísla 2 do 16 a v rámci tohoto intervalu realizují další pokusy. Protože první pokus skončil na čísle 10, tedy když bylo Honzíkovi 10 let, nabízí se zvednout Honzíkův věk „dnes" o 6 let. Pokud žáci přijdou na efektivní strategii, že věk Honzíka *dnes* musí být ve středu intervalu od 2 do 16, což je 9, tak si zvědomili, že čas, který uplynul mezi *dnes* a *potom*, je pro obě děti stejný, což je klíčová vazba k úlohám tohoto typu.

Strategie C_Cyril (Zkrácená tabulka)

Cyril: *Odhadl jsem věk Honzíka na 6 let. Zjistil jsem, že Anička je o 4 roky mladší než Honzík. Tedy až bude Honzíkovi 16, tak Aničce bude 12. To jsem se ale nestrefil, protože Aničce mělo být jenom 6. Pro jistotu jsem si to zaznamenal, abych se k tomu při dalších pokusech už nevracel. A takhle jsem v pokusech pokračoval, až mi to vyšlo.*

1. pokus	dnes	potom
Věk Aničky	**2**	12
Věk Honzíka	6	**16**

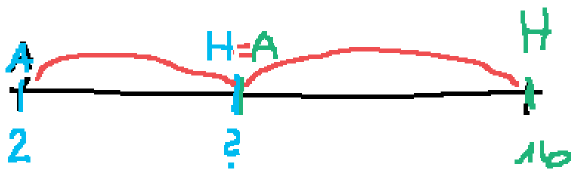
Cyril si pravděpodobně při předchozích sehrávkách a sestavování tabulek všiml, že důležité časové údaje jsou věk Aničky *dnes* a věk Honzíka *potom*, a už měl ve vědomí, že věk Honzíka *dnes* musí být stejný jako věk Aničky *potom*. Využil poznatku, že věkový rozdíl obou dětí je stále stejný. Proti očekávání tento poznatek nepochází běžně ze životních zkušeností dítěte. Zejména děti jedináčci se s tímto jevem nemají příležitost setkat.

Všechny potřebné údaje Cyril evidoval do tabulky a využil je k řešení metodou *pokus – ověření – korekce*.

Očekáváme, že žáci budou pokračovat v metodě *pokus – ověření – korekce* tak dlouho, dokud odhadnutý věk Honzíka *dnes* nebude stejný jako vypočítaný věk Aničky *potom*. Žáci si zapisují své pokusy buď do dalších tabulek, nebo je zaznamenávají do okének jedné tabulky, dokud nenastane naznačená rovnost, tj. věk Honzíka *dnes* je 9 let.

Strategie D_Dan (Číselná osa s evidencí vazeb)

Dan: *Já jsem si namaloval tu situaci pomocí časové osy. Vyznačil jsem si věk Aničky dnes modře a Honzíka potom zeleně. Pak jsem odhadnul, kolik asi je dnes Honzíkovi, a vyznačil jsem si to opět modře. Červeným obloučkem jsem vyznačil, o kolik let musela Anička zestárnout, a tím jsem si hned uvědomil, že úplně stejným obloučkem je potřeba vyznačit, o kolik let musel zestárnout Honzík, aby dosáhnul 16 let. A pak už jsem to snadno dořešil.*



Ke znázornění situace Dan využil číselnou osu, na níž si vyznačil klíčové údaje, tj. modré A (věk Aničky *dnes*) na čísle 2 a zelené H (věk Honzíka *potom*) na čísle 16. Modré H (věk Honzíka *dnes*) odhadnul někde mezi 2 a 16. Průběh stárnutí Aničky si uvědomil při kreslení červeného obloučku od modrého A k modrému H. Při vyznačení, že modré H se rovná zelenému A (věk Aničky *potom*), si uvědomil, že oblouček mezi zelenými písmeny A a H musí být stejný jako mezi modrými A a H. Tak ho nakreslil také červeně. Jinými slovy přišel na klíčový poznatek, že oba stárnou stejně rychle a že jejich věkový rozdíl se s časem nezmění.

Úkolem žáků je poznat, že červené obloučky, i když je to na obrázku nepřesně, jsou stejně dlouhé. Z toho vyplyne, že modré H a zelené A je středem úsečky s krajními body modré A a zelené H. Červený oblouček tedy zobrazuje 7 let, tj. polovinu ze 14 (16 – 2). Tedy modré H a zelené A musí být zapsána u čísla 9.

Strategie E_Emilka (Rovnice)

Emilka: *Nevěděla jsem, kolik je Honzíkovi dnes. Tak jsem si napsala do tabulky u věku Honzíka dnes písmeno H. Anička potom má být stejně stará, jako je Honzík dnes, proto jsem si H ještě napsala sem a pak už jsem uměla sestavit rovnici.*

	dnes	potom
Věk Aničky	2	
Věk Honzíka	H	16

Emilka si uvědomila rovnost čísel věk Honzíka *dnes* a věk Aničky *potom*. Díky uspořádání údajů v tabulce si ještě uvědomila buď to, že čas mezi *dnes* a *potom* je stejný jak u Aničky, tak u Honzíka, nebo to, že věkový rozdíl mezi Aničkou a Honzíkem *dnes* je stejný jako mezi Aničkou a Honzíkem *potom*. Pak již sestavila rovnici.

Očekáváme, že žáci doplní do okénka tabulky věk Aničky *potom* písmeno H a sestaví rovnici H – 2 = 16 – H, která vyjadřuje jeden nebo druhý popsaný vztah, a vyřeší ji.

Žáci z 9. ročníku, kteří pracovali se strategiemi Cyril, Dan a Emilka, měli k našemu překvapení za nejméně oblíbenou strategii Dan. U této strategie žáci nejčastěji uvedli, že je překvapila (*byla nesmyslná; to je složitý; mi to vůbec nedávalo smysl; to byla velmi zajímavá cesta; by mě to v životě nenapadlo, ale není špatná; byla nejlehčí; bylo to těžký; nenapadlo by mě udělat si osu*). Nejoblíbenější byla strategie Cyril a jen o něco méně Emilka. Žáci 7. ročníku volili jako nejoblíbenější strategii Dan (*byla nejlehčí; to měl jiné než ostatní; byla jednoduchá a stručně nakreslená; bylo to nejlehčí a byl hned vidět výsledek*). Mladší žáci 6. ročníku si nejvíce oblíbili strategii Alena (*jsem ji pochopila; byla logicky více chápaná*). Je vidět, že volba oblíbené strategie se mění s věkem žáků. Samozřejmě, že také záleží na tom, jak třída o strategiích komunikuje. Na této ukázce můžeme vidět, že každý žák má možnost si vybrat strategii, která odpovídá jeho způsobu myšlení a předchozím zkušenostem.

Návazná práce – další úlohy

Učitel žákům předloží další úlohu a doporučí jim, jakou strategií mají úlohu řešit. Kromě zde nabídnutých může využít i těch, které vymysleli žáci, pokud úlohu řešili. V závorce je výsledek a doporučené strategie.

Úloha 1.

Anička nastoupila do výtahu v mrakodrapu v 19. podlaží. Když vystupovala, potkala Honzíka. Anička řekla: „Až ty vyjedeš tolik pater, co jsem vyjela já, abychom se potkali, tak budeš ve 37. podlaží." Ve kterém podlaží se potkali?

[Výsledek: Potkali se ve 28. podlaží. Každý z nich vyjel 9 podlaží. Strategie: A_Sehrávka, B_Časová osa, C_Zkrácená tabulka, D_Číselná osa a evidence vazeb, E_Rovnice]

Úloha 2.

Honzík a Anička přinesli domů kaštany. Anička měla 4 kaštany. Babička jí řekla: „Tady máš další kaštany, abys jich měla stejně jako Honzík." Ale Honzík řekl: „Mně také přidej tolik kaštanů, kolik jsi přidala Aničce." Honzík jich měl nakonec 26. Kolik kaštanů si přinesl domů Honzík?

[Výsledek: Honzík si přinesl domů 15 kaštanů. Babička každému přidala 11 kaštanů. Strategie: A_Sehrávka, B_Časová osa, C_Zkrácená tabulka, D_Číselná osa a evidence vazeb, E_Rovnice]

Úloha 3.

Anička má 2 kaštany, Honzík 16 kaštanů. Kolik kaštanů má dát Honzík Aničce, aby jich měli oba stejně?

[Výsledek: Honzík má dát Aničce 7 kaštanů. Strategie: A_Sehrávka, C_Zkrácená tabulka, E_Rovnice]

Pracovní list k úloze Kolik let je Honzíkovi?
(pro 2. až 3. ročník)

Dnes jsou Aničce 2 roky. Až jí bude tolik let, kolik je dnes Honzíkovi, bude Honzíkovi 16 let. Kolik let je dnes Honzíkovi?

Dokončete následující řešení Aleny a Blanky.

Strategie Alena

Alena: *Já tu úlohu řeším tak, že si s bratrem zahraju, jak utíká čas. Položili jsme si na zem za sebou čísla 1, 2, …, 16, 17, 18. Ta čísla jsme brali tak, že to je věk Aničky a Honzíka. Já jsem hrála Aničku a postavila jsem se na dvojku. Bratr hrál Honzíka, ale nevěděli jsme, kam se má postavit. Tak jsme to odhadli a postavil se na číslo 6. Pak jsme hráli na „plynutí času". Já jsem řekla, že jsem zestárla o 1 rok, a udělala jsem 1 krok na 3 a bratr udělal 1 krok na 7. Tak jsme pokračovali, ale tenhle pokus nám nevyšel. Celý pokus jsme opakovali tak, že jsme měnili odhadnutý věk Honzíka. Pro jistotu jsme si to zapisovali. A nakonec nám to vyšlo.*

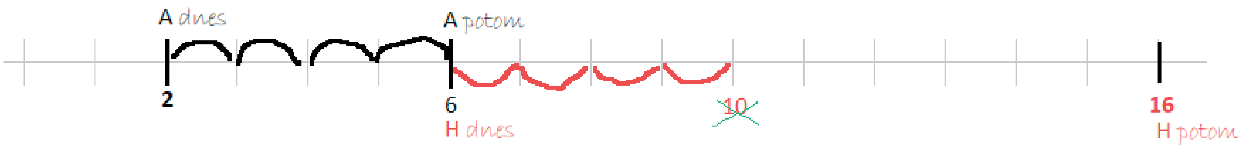
Pokus 1	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	
věk Aničky	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Anička je stejně stará, jako byl Honzík na začátku.*
věk Honzíka	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*Honzíkovi není 16 let.*

Pokus 2	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	
věk Aničky	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Anička ještě není stejně stará, jako byl Honzík na začátku.*
věk Honzíka	*12*	*13*	*14*	*15*	***16***	*Honzíkovi je 16.*

Pokus 3	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*						
věk Aničky	*2*	*3*	*4*	*5*	***6***						
věk Honzíka											

Strategie Blanka

BLANKA: *Já jsem si nakreslila časovou osu, podobnou jako máme nakreslenou na chodbě ve škole. Protože jsou Aničce dneska 2 roky, tak jsem si u čísla 2 napsala A dnes. Pak jsem si za každý rok udělala jednu čárku a u 16 jsem si napsala H potom. A pak už jsem začala zkoušet. Když jako uplynul 1 rok, tak jsem si udělala u Aničky a Honzíka oblouček k další čárce. V prvním pokusu jsem zvolila, že Honzíkovi je 6 let. Ten mi nevyšel, protože Honzíkovi bylo potom jen 10 let, ale má mu být 16. Takhle jsem pokračovala, až mi to vyšlo.*



Evaluační dotazník B

Názvy strategií, které jste ve skupině dokončovali: ______________________________

Ze všech strategií se mi nejvíce líbila strategie s názvem ______________, protože ____________ ____.

Překvapila mě strategie s názvem ______________, protože ______________________.

Měl/a jsem problém porozumět strategii s názvem ______________.

Nikdy bych nepoužil/a strategii s názvem ______________, protože ______________________.

Příště bych asi použil/a strategii s názvem ______________.

Napadla mě ještě jiná strategie: ANO / NE. Popíšu ji:

Pracovní list k úloze Kolik let je Honzíkovi?
(pro 4. až 6. ročník)

Dnes jsou Aničce 2 roky. Až jí bude tolik let, kolik je dnes Honzíkovi, bude Honzíkovi 16 let. Kolik let je dnes Honzíkovi?

Dokončete následující řešení Aleny, Blanky, Cyrila a Dana.

Strategie Alena

Alena: *Já tu úlohu řeším tak, že si s bratrem zahraju, jak utíká čas. Položili jsme si na zem za sebou čísla 1, 2, …, 16, 17, 18. Ta čísla jsme brali tak, že to je věk Aničky a Honzíka. Já jsem hrála Aničku a postavila jsem se na dvojku. Bratr hrál Honzíka, ale nevěděli jsme, kam se má postavit. Tak jsme to odhadli a postavil se na číslo 6. Pak jsme hráli na „plynutí času". Já jsem řekla, že jsem zestárla o 1 rok, a udělala jsem 1 krok na 3 a bratr udělal 1 krok na 7. Tak jsme pokračovali, ale tenhle pokus nám nevyšel. Celý pokus jsme opakovali tak, že jsme měnili odhadnutý věk Honzíka. Pro jistotu jsme si to zapisovali. A nakonec nám to vyšlo.*

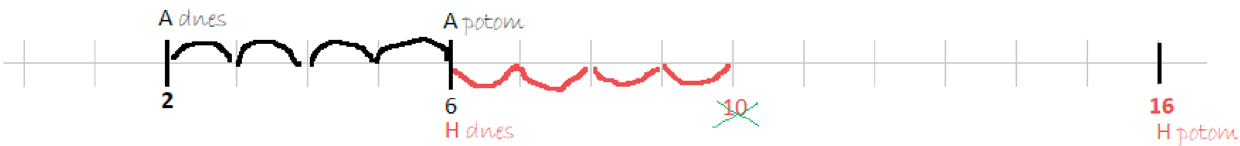
Pokus 1	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	
věk Aničky	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Anička je stejně stará, jako byl Honzík na začátku.*
věk Honzíka	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*Honzíkovi není 16 let.*

Pokus 2	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	
věk Aničky	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Anička ještě není stejně stará, jako byl Honzík na začátku.*
věk Honzíka	*12*	*13*	*14*	*15*	***16***	*Honzíkovi je 16.*

Pokus 3	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*						
věk Aničky	*2*	*3*	*4*	*5*	***6***						
věk Honzíka											

Strategie Blanka

BLANKA: *Já jsem si nakreslila časovou osu, podobnou jako máme nakreslenou na chodbě ve škole. Protože jsou Aničce dneska 2 roky, tak jsem si u čísla 2 napsala A dnes. Pak jsem si za každý rok udělala jednu čárku a u 16 jsem si napsala H potom. A pak už jsem začala zkoušet. Když jako uplynul 1 rok, tak jsem si udělala u Aničky a Honzíka oblouček k další čárce. V prvním pokusu jsem zvolila, že Honzíkovi je 6 let. Ten mi nevyšel, protože Honzíkovi bylo potom jen 10 let, ale má mu být 16. Takhle jsem pokračovala, až mi to vyšlo.*



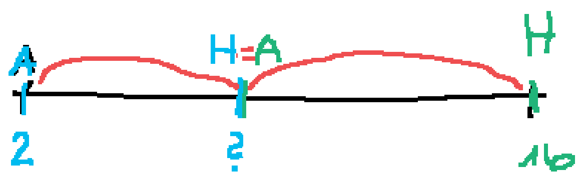
Strategie Cyril

CYRIL: *Odhadl jsem věk Honzíka na 6 let. Zjistil jsem, že Anička je o 4 roky mladší než Honzík. Tedy až bude Honzíkovi 16, tak Aničce bude 12. To jsem se ale nestrefil, protože Aničce mělo být 6. Pro jistotu jsem si to zaznamenal, abych se k tomu při dalších pokusech už nevracel. A takhle jsem pokračoval, až mi to vyšlo.*

1. pokus	dnes	potom
Věk Aničky	2	12
Věk Honzíka	6	16

Strategie Dan

DAN: *Já jsem si namaloval tu situaci pomocí časové osy. Vyznačil jsem si věk Aničky dnes modře a Honzíka potom zeleně. Pak jsem odhadnul, kolik asi je dnes Honzíkovi, a vyznačil jsem si to opět modře. Červeným obloučkem jsem vyznačil, o kolik let musela Anička zestárnout, a tím jsem si hned uvědomil, že úplně stejným obloučkem je potřeba vyznačit, o kolik let musel zestárnout Honzík, aby dosáhnul 16 let. A pak už jsem to snadno dořešil.*



Evaluační dotazník B

Názvy strategií, které jste ve skupině dokončovali: ______________________________

Ze všech strategií se mi nejvíce líbila strategie s názvem ________________, protože ____________
____.

Překvapila mě strategie s názvem ________________, protože ____________________________.

Měl/a jsem problém porozumět strategii s názvem __________________.

Nikdy bych nepoužil/a strategii s názvem ________________, protože ____________________.

Příště bych asi použil/a strategii s názvem ________________.

Napadla mě ještě jiná strategie: ANO / NE. Popíšu ji:

Pracovní list k úloze Kolik let je Honzíkovi?
(pro 7. až 9. ročník)

Dnes jsou Aničce 2 roky. Až jí bude tolik let, kolik je dnes Honzíkovi, bude Honzíkovi 16 let. Kolik let je dnes Honzíkovi?

Dokončete následující řešení Cyrila, Dana a Emilky.

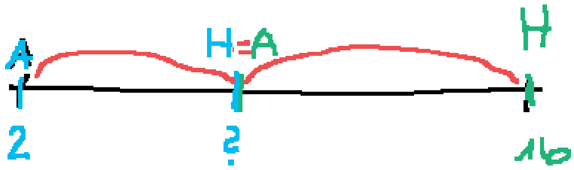
Strategie Cyril

CYRIL: *Odhadl jsem věk Honzíka na 6 let. Zjistil jsem, že Anička je o 4 roky mladší než Honzík. Tedy až bude Honzíkovi 16, tak Aničce bude 12. To jsem se ale nestrefil, protože Aničce mělo být 6. Pro jistotu jsem si to zaznamenal, abych se k tomu při dalších pokusech už nevracel. A takhle jsem pokračoval, až mi to vyšlo.*

1. pokus	dnes	potom
Věk Aničky	**2**	12
Věk Honzíka	6	**16**

Strategie Dan

DAN: *Já jsem si namaloval tu situaci pomocí časové osy. Vyznačil jsem si věk Aničky dnes modře a Honzíka potom zeleně. Pak jsem odhadnul, kolik asi je dnes Honzíkovi, a vyznačil jsem si to opět modře. Červeným obloučkem jsem vyznačil, o kolik let musela Anička zestárnout, a tím jsem si hned uvědomil, že úplně stejným obloučkem je potřeba vyznačit, o kolik let musel zestárnout Honzík, aby dosáhnul 16 let. A pak už jsem to snadno dořešil.*



Strategie E_Emilka

EMILKA: *Nevěděla jsem, kolik je Honzíkovi dnes. Tak jsem si napsala do tabulky u Honzíka dnes H. Anička potom má být stejně stará, jako je Honzík dnes, proto jsem si H ještě napsala sem a pak už jsem uměla sestavit rovnici.*

	dnes	potom
Věk Aničky	**2**	
Věk Honzíka	H	**16**

Evaluační dotazník B

Názvy strategií, které jste ve skupině dokončovali: ______________________________

Ze všech strategií se mi nejvíce líbila strategie s názvem ____________, protože ____________
____.

Překvapila mě strategie s názvem ____________, protože ______________________.

Měl/a jsem problém porozumět strategii s názvem ______________.

Nikdy bych nepoužil/a strategii s názvem ____________, protože ______________.

Příště bych asi použil/a strategii s názvem ____________.

Napadla mě ještě jiná strategie: ANO / NE. Popíšu ji:

Metodický list k úloze Narozeninová oslava I

3. až 4. ročník

Téma: práce s daty, kombinatorika

Na narozeninové oslavě se setkalo 5 dívek a každá si s každou ťukla na zdraví skleničkou limonády. Kolik ťuknutí na párty zaznělo?

Slovní úloha je specifická tím, že vzhledem k věku žáků není řešením výpočet, ale buď pečlivé vyhledávání všech možností, nebo odhalení pravidelnosti při vyhledávání všech možností a evidence výsledků pro různé počty dívek.

Úloha je z oblasti práce s daty. Jeden údaj je vlastně výběr jedné neuspořádané dvojice. Je důležité zajistit, abychom žádnou dvojici nevynechali a aby žádná dvojice nebyla započítána dvakrát (tj. každý s každým), např. A si ťukne s B, ale B už si nebude ťukat s A. Řešitelská strategie spočívá ve volbě vhodného způsobu organizace dat. Úspěšná je ta, která zajistí vyčerpání všech možností. Jedná se o úlohu kombinatorickou, kdy vyhledáváme všechny různé dvojice vytvořené z 5 prvků (jazykem střední školy jde o kombinační číslo 5 *nad* 2). Kombinatorika patří k náročnému učivu střední školy i proto, že žáci nemají dostatek zkušeností s řešením kombinatorických úloh bez vzorců. Je proto důležité, aby žáci získávali již od 1. stupně základní školy zkušenosti s řešením těchto úloh na úrovni prožitku a vizualizace.

Z hlediska jazykového může působit žákům komplikace obrat *každý s každým*, který znamená, že si dívky budou ťukat po dvou, každá dvojice si spolu ťukne a žádná dvojice si nesmí ťuknout dvakrát.

Společná práce s textem úlohy

Porozumění textu úlohy	Rozvoj jazykové gramotnosti
1. Řekni vlastními slovy, o čem úloha je.	4. Ve kterých slovech se vyskytuje skupina hlásek/písmen *ťuk*? Urči jejich slovní druh.
2. S kolika dívkami si každá z pěti dívek ťukla? Co kdyby počet dívek byl jiný? Např. 2, 3, 4, 6, …	5. V úloze se vyskytují dvě slova se stejným významem – synonyma. Která to jsou?
3. Pokuste se zorganizovat k úloze divadelní scénku.	6. Ke slovu *dívka* napiš alespoň jedno synonymum.

Řešení

(1) Otevřená otázka. **(2)** Každá z pěti dívek si ťukla se čtyřmi dívkami. (1, 2, 3, 5, …). **(3)** Otevřená otázka. **(4)** Ťukla – ťuknout – sloveso, ťuknutí – podstatné jméno. **(5)** Oslava – párty. **(6)** Holka, děvče.

Přehled a rozbor jednotlivých nedokončených řešitelských strategií

Strategie A_Alena (Sehrávka)

Alena: *Zorganizovala jsem 5 spolužáků, vzali jsme si skleničky, sehráli jsme si to a počítali. První žák si nejdříve ťuknul s druhým, pak se třetím, se čtvrtým a nakonec s pátým. Pak druhý žák si už neťukal s prvním, ale se třetím, se čtvrtým, … A takhle jsme pokračovali a počítali ťuknutí.*

Alena zvolila sehrávku se skutečnými dětmi a našla systém, jak děti zorganizovat tak, aby si každý ťuknul s každým a aby si žádná dvojice neťukla dvakrát.

Očekáváme, že žáci si podle Aleny scénku zahrají a některý žák pečlivě eviduje a počítá ťuknutí. První žák si ťuknul čtyřikrát, po něm druhý žák třikrát, pak třetí žák dvakrát a čtvrtý už jen jednou. Výsledek je tedy 10 ťuknutí.

Strategie B_Ben (Tabulka – turnaj)

Ben: *Udělal jsem si tabulku, jako když organizuji šachový turnaj pro 5 hráčů. Takhle jsem začal a pak už mi bylo vše jasné.*

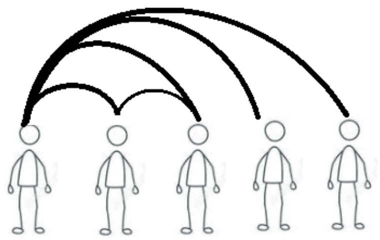
	Agáta	Broňa	Cecilka	Diana	Elena
Agáta	x	√			
Broňa	--	x			
Cecilka			x		
Diana				x	
Elena					x

Ben zvolil tabulku, kterou znal ze šachového turnaje. Při turnaji se píší vždy výsledky do obou políček, například Agáta–Broňa i Broňa–Agáta, ale výsledky se píší obráceně a každému je jasné, že šlo o jednu hru. V této situaci však Ben označil jen jedno ze dvou políček, které bude počítat jako ťuknutí. To příslušné druhé políčko vyškrtnul pomlčkou.

Ze dvou odpovídajících si políček mohou žáci vždy zvolit jedno a nezáleží které. Pro lepší přehlednost je vhodné zvolit políčka jen v jedné části tabulky rozdělené úhlopříčkou (křížky). Bude tak označeno 10 políček.

Strategie C_Cecilka (Obloučky)

Cecilka: *Já jsem si nejdříve nakreslila pět panáčků v řadě a mezi nimi jsem dělala obloučky, jak si ťukali. A když jsem je všechny udělala, bylo mi vše jasné.*

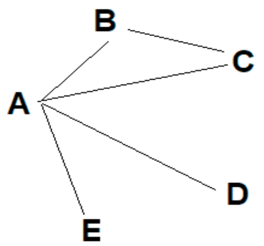


Cecilka vizualizovala 5 dívek a ťuknutí skleničkou znázornila obloučkem mezi dvěma panáčky. Každý oblouček znamená výběr jedné dvojice z pěti.

Očekáváme, že žáci dokreslí všechny obloučky, které pak spočítají. Při počítání by mohli zjistit, že od prvního panáčka vychází 4 obloučky směrem doprava a od druhého panáčka už jenom 3 a od třetího jenom 2 a od čtvrtého jenom 1. Mohou pak počítat efektivněji 4 + 3 + 2 + 1 = 10 (ťuknutí).

Strategie D_Dan (Pětiúhelník)

Dan: *Znázornil jsem si dívky pomocí písmen jako vrcholy pětiúhelníku a ty jsem spojoval, jako bych vyznačoval strany a úhlopříčky pětiúhelníku. Pak jsem strany a úhlopříčky spočítal.*



Dan vizualizoval 5 dívek jako vrcholy pětiúhelníku a ťuknutí skleničkou znázornil úsečkou spojující dva z pěti bodů. Úlohu vlastně převedl na geometrickou úlohu: Kolik různých úseček určuje 5 bodů, které jsou vrcholy pětiúhelníku?

Očekáváme, že žáci dokončí vyznačování všech úseček, které pak spočítají. Při počítání by mohli zjistit, že každý z 5 vrcholů je spojen se čtyřmi dalšími, tedy úseček by mohlo být $5 \cdot 4 = 20$. Ale např. úsečka *AB* je ta samá jako úsečka *BA*. Tedy každá úsečka je započítána dvakrát a je potřeba 20 vydělit dvěma. Výsledek je 10.

Strategie E_Eva (Dvojice písmen)

Eva: *Označila jsem si 5 dívek písmeny A, B, C, D, E a začala jsem si vypisovat systematicky tímto způsobem dvojice.*

A–B A–C A–D A–E

B–C …

Když jsem našla všechny, všimla jsem si, že 4 dvojice začínají na A, …. a pak už to bylo jasné.

Eva dívky pojmenovala pro přehlednost písmeny A, B, C, D, E. Ťuknutí si skleničkou dvou dívek vyjádřila dvojicí písmen. Bylo jí jasné, že ty dvojice jsou neuspořádané, tedy když zapsala dvojici A–B, tak věděla, že dvojici B–A už zapisovat nebude. Využila principu uspořádání písmen podle abecedy. To jí zajistilo, že nezopakovala žádnou dvojici dvakrát.

Očekáváme, že žáci budou pokračovat ve vypisování dvojic: B–D, B–E, C–D, C–E, D–E. Buď všechny dvojice spočítají (je jich 10), nebo si všimnou, že 4 dvojice začínají na A, 3 na B, 2 na C a 1 na D a počítají $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ (ťuknutí).

Návazná práce – další úlohy

Učitel žákům předloží další úlohu a doporučí jim, jakou strategií mají úlohu řešit. Kromě zde nabídnutých může využít i těch, které vymysleli žáci, pokud úlohu sami řešili. V závorce je výsledek a doporučené strategie.

Úloha 1.

Do školního turnaje ve fotbale se přihlásilo 5 družstev. V turnaji se hrálo systémem každý s každým. Kolik zápasů celkem bylo odehráno?

[Výsledek: 10 zápasů. Strategie: A_Sehrávka, B_Tabulka, C_Obloučky, D_Pětiúhelník, E_Dvojice písmen]

Úloha 2.

Na obrázku níže je 5 bodů *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Kolik různých úseček s krajními body ve dvou z bodů *A*, *B*, *C*, *D*, *E* lze vytvořit?

[Výsledek: 10 úseček. Strategie: A_Sehrávka, C_Obloučky, D_Pětiúhelník, E_ Dvojice písmen]

Úloha 3.

Kolik různých věží lze postavit ze 2 červených a 3 bílých krychlí (na obrázku niže)?

[Výsledek: 10 různých věží. Strategie: E_Dvojice písmen]

Úloha 4.

Na schůzi pětičlenného výboru přicházejí členové postupně. Každý, kdo přijde, si podá ruku s každým již přítomným. Kolik podání rukou se odehraje?

[Výsledek: 10 podání rukou. Strategie: A_Sehrávka, B_Tabulka – turnaj, C_Obloučky, D_Pětiúhelník, E_Dvojice písmen]

Úloha 5.

Ve firmě volili z 5 kandidátů 2 osoby do vedení firmy. Kolik takových dvojic mohli zvolit?

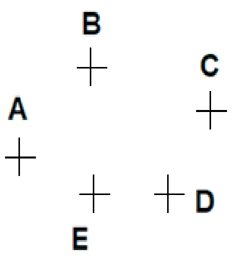
[Výsledek: 10 dvojic. Strategie: A_Sehrávka, B_Tabulka – turnaj, C_Obloučky, D_Pětiúhelník, E_Dvojice písmen]

Úloha 6.

Kolika různými nejkratšími cestami můžeš jít z domu D do školy Š na obrázku níže?

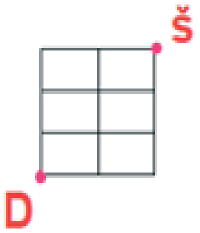
[Výsledek: 10 různých nejkratších cest. Strategie: E_Dvojice čísel, které označují, ve kterých dvou krocích z pěti se udělal pohyb doprava, např. 1–3 znamená, že z D jdeme doprava, nahoru, doprava, nahoru, nahoru a dojdeme do Š]

Obr. k úloze 2.



Obr. k úloze 3.

Obr. k úloze 6.



Pracovní list 1 k úloze Narozeninová oslava I
(pro 3. až 4. ročník)

Na narozeninové oslavě se setkalo 5 dívek a každá si s každou ťukla na zdraví skleničkou limonády. Kolik ťuknutí na párty zaznělo?

Dokončete následující řešení Aleny, Bena a Cecilky.

Strategie Alena

ALENA: *Zorganizovala jsem 5 spolužáků, vzali jsme si skleničky, sehráli jsme si to a počítali. První žák si nejdříve ťuknul s druhým, pak se třetím, se čtvrtým a nakonec s pátým. Pak druhý žák si už neťukal s prvním, ale se třetím, se čtvrtým, … A takhle jsme pokračovali a počítali ťuknutí.*

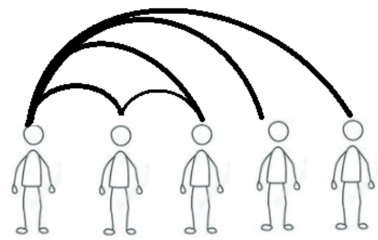
Strategie Ben

BEN: *Udělal jsem si tabulku, jako když organizuji šachový turnaj pro 5 hráčů. Takhle jsem začal a pak už mi bylo vše jasné.*

	Agáta	Broňa	Cecilka	Diana	Elena
Agáta	x	√			
Broňa	--	x			
Cecilka			x		
Diana				x	
Elena					x

Strategie Cecilka

CECILKA: *Já jsem si nejdříve nakreslila pět panáčků v řadě a mezi nimi jsem dělala obloučky, jak si ťukali. A když jsem je všechny udělala, bylo mi vše jasné.*



Evaluační dotazník B

Názvy strategií, které jste ve skupině dokončovali: ____________________________

Ze všech strategií se mi nejvíce líbila strategie s názvem ______________, protože ______________
____.

Překvapila mě strategie s názvem ______________, protože ______________________.

Měl/a jsem problém porozumět strategii s názvem ________________.

Nikdy bych nepoužil/a strategii s názvem ______________, protože ______________________.

Příště bych asi použil/a strategii s názvem ______________.

Napadla mě ještě jiná strategie: ANO / NE. Popíšu ji:

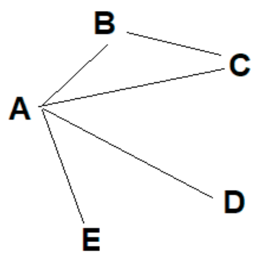
Pracovní list 2 k úloze Narozeninová oslava I
(pro 3. a 4. ročník)

Na narozeninové oslavě se setkalo 5 dívek a každá si s každou ťukla na zdraví skleničkou limonády. Kolik ťuknutí na párty zaznělo?

Dokončete následující řešení Dana a Evy.

Strategie Dan

DAN: *Znázornil jsem si dívky pomocí písmen jako vrcholy pětiúhelníku a ty jsem spojoval jako bych vyznačoval strany a úhlopříčky pětiúhelníku. Pak jsem strany a úhlopříčky spočítal.*



Strategie Eva

EVA: *Označila jsem si 5 dívek písmeny A, B, C, D, E a začala jsem si vypisovat systematicky tímto způsobem dvojice.*

A–B A–C A–D A–E B–C …

Když jsem našla všechny, všimla jsem si, že 4 dvojice začínají na A, …. a pak už to bylo jasné.

Metodický list k úloze Narozeninová oslava II

5. až 7. ročník Téma: práce s daty, kombinatorika

Na narozeninové oslavě se setkalo 10 spolužáků a každý si s každým ťukl na zdraví skleničkou limonády. Kolik ťuknutí na párty zaznělo?

V této úloze oproti NES05 zvyšujeme počet účastníků a nabízíme další abstraktnější strategie.

Slovní úloha je specifická tím, že jejím řešením není výpočet, ale buď pečlivé vyhledávání všech možností, nebo odhalení pravidelnosti při vyhledávání všech možností a evidence výsledků pro různé počty spolužáků na oslavě.

Úloha je z oblasti práce s daty. Jeden údaj je vlastně výběr jedné neuspořádané dvojice. Je důležité zajistit, abychom žádnou dvojici nevynechali a aby žádná dvojice nebyla započítána dvakrát (tj. každý s každým), např. A si ťukne s B, ale B už si nebude ťukat s A. Řešitelská strategie spočívá ve volbě vhodného způsobu *organizace dat*. Úspěšná je ta, která zajistí vyčerpání všech možností. Jedná se o úlohu kombinatorickou, kdy vyhledáváme všechny různé dvojice vytvořené z 10 prvků (jazykem střední školy jde o kombinační číslo *10 nad 2*). Kombinatorika patří k náročnému učivu střední školy i proto, že žáci mají málo zkušeností s řešením kombinatorických úloh bez vzorců. Je proto důležité, aby žáci získávali již od 1. stupně základní školy zkušenosti s řešením těchto úloh na úrovni prožitku a vizualizace.

Společná práce s textem úlohy

Porozumění textu úlohy	Rozvoj jazykové gramotnosti
1. Pokuste se k úloze zorganizovat divadelní scénku.	4. Která slova mají slovní základ *ťuk*? Urči jejich slovní druh.
2. Přeformuluj tvrzení, že každý spolužák si ťuknul s každým. S kolika spolužáky si každý z deseti žáků ťuknul?	5. V úloze se vyskytují dvě slova se stejným významem – synonyma. Která to jsou?
3. Řekni vlastními slovy, o čem úloha je.	6. Slovo *spolužák* vyjádři jiným způsobem a rozhodni, zda bychom tímto způsobem mohli stylisticky vhodně nahradit slovo *spolužák*.

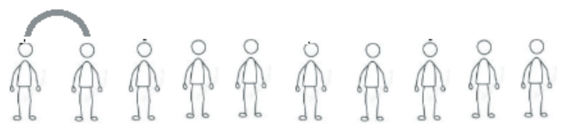
Řešení

(1) Otevřená otázka. **(2)** Např. každý spolužák si ťuknul se všemi ostatními právě jednou a žádná dvojice si neťukla dvakrát. Každý z deseti žáků si ťuknul s devíti spolužáky. **(3)** Otevřená otázka. **(4)** *Ťukl* – *ťuknout* – sloveso, *ťuknutí* – podstatné jméno. **(5)** Oslava – párty. **(6)** Spolužák – žák ze stejné třídy. Ano, mohli.

Přehled a rozbor jednotlivých nedokončených řešitelských strategií

Strategie A_Alena (Sehrávka – obloučky)

Alena: *Chtěla jsem zorganizovat 10 spolužáků, abychom si situaci zahráli. Ale bylo nás pouze 5. Já jsem začala a ťukla jsem si se všemi 4. Pak byl na řadě Béďa a už si ťuknul jen se 3 zbylými. Dále si ťukal Cyril a nakonec si ťuknul Dan s Emilkou. Ani jsme to nemuseli dohrát a už jsme byli schopni si nakreslit, jak by to probíhalo, kdyby nás bylo 10. Takhle jsem začala a pak už bylo vše jasné.*



Alena zvolila nejdříve sehrávku se skutečnými dětmi. Tím, že žáků bylo málo, se situace zjednodušila. Našla systém, jak zorganizovat ťukání, aby si ťuknul každý s každým. Tento systém byl snadno uskutečnitelný i graficky. Alena si nakreslila 10 panáčků a ťuknutí reprezentovala obloučky mezi nimi. Očekáváme, že žáci si podle Aleny scénku zahrají. Podle sehrávky dokreslí do obrázku s panáčky obloučky jako ťuknutí. Bude vidět, že první panáček si ťukne s 9 panáčky, druhý s 8 atd. Bude jasné, že stačí sečíst 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45 (ťuknutí).

Strategie B_Ben (Tabulka – turnaj)

Ben: *Udělal jsem si tabulku, jako když organizuji ve škole šachový turnaj pro 10 hráčů. Ani jsem ji nemusel vyplnit celou a bylo mi jasné, jak to počítat.*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	X	AB	AC	AD						
B	-	X	BC							
C	-	-	X							
D	-			X						
E					X					
F						X				
G							X			
H								X		
I									X	
J										X

Ben zvolil tabulku, kterou znal ze šachového turnaje. Při turnaji se píší výsledky do obou políček, například A–B i B–A, ale výsledky se píší obráceně a každému je jasné, že šlo o jednu hru. V této situaci však Ben označil jen jedno ze dvou políček, které bude počítat jako ťuknutí. Druhé příslušné políčko vyškrtnul pomlčkou.

Ze dvou odpovídajících si políček mohou žáci vždy zvolit jedno a nezáleží které. Pro lepší přehlednost je vhodné zvolit políčka jen v jedné části tabulky rozdělené úhlopříčkou (křížky). Tabulka má 100 políček, 10 je označeno křížky, neboť žádný si neťuká sám se sebou. Ze zbylých 90 políček bereme pouze polovinu. Tomu odpovídá výpočet (100 – 10) : 2 = 45 (ťuknutí).

Strategie C_Cyril (Tabulka – závislost)

Cyril: *Řekl jsem si, že kdyby byli jen 3 spolužáci, tak by byla 3 ťuknutí, kdyby byli 4 spolužáci, tak by bylo 6 ťuknutí. Pak jsem si raději udělal tabulku a ještě pomocí obrázku jsem zjistil, že když si ťuká*

5 spolužáků, ozve se 10 ťuknutí. V tabulce jsem si všiml, jak čísla ve druhém sloupečku rostou. Pak jsem to snadno dopočítal.

počet žáků	*počet ťuknutí*
2	*1*
3	*3*
4	*6*
5	*10*
6	
7	
8	
9	
10	

Cyril využil strategii zobecňování, se kterou měl již dřívější zkušenosti. Podstatou této strategie je postup od nejjednodušších situací a nejmenších čísel a evidence výsledků. Přehledné uspořádání v tabulce Cyrilovi umožnilo vidět pravidelnost, s jakou narůstají čísla v pravém sloupci. Předpokládal, že tato pravidelnost bude pokračovat, a v tomto duchu tabulku dokončil.

Očekáváme, že žáci odhalí pravidelnost, s jakou narůstají čísla v pravém sloupci. Ve druhém řádku je číslo o 2 větší než v prvním, ve třetím řádku je číslo o 3 větší než ve druhém, ve čtvrtém řádku je číslo o 4 větší než ve třetím. A tak doplní do tabulky další čísla: 15, 21, 28, 36, 45. Výsledkem je tedy 45 ťuknutí u 10 spolužáků.

Žáci v jedné třídě 6. ročníku uváděli všechny tři strategie (Alena, Ben a Cyril) přibližně stejně často jako oblíbené (*byla lehká, je jednoduchá; mi vyhovovala; jsem to pochopila; vyšla nám*). I v ostatních položkách byla volba žáků rovnoměrně rozdělená, jen strategii Ben (turnajová tabulka) by příště nevolil nikdo. Z jiné třídy by ji však volili téměř všichni jako nástroj řešení dalších úloh i jako nejoblíbenější (*já jsem jí nejvíce rozuměla; je lehká a pomůže; dobře se mi s ní pracovalo a není tak složitá; je nejjednodušší a logická; jde mi rychle*). To je zřejmě důsledek zkušeností žáků s pořádáním turnajů a obvyklou evidencí výsledků.

Návazná práce – další úlohy

Učitel žákům předloží další úlohu a doporučí jim, jakou strategií mají úlohu řešit. Kromě zde nabídnutých může využít i těch, které vymysleli žáci, pokud úlohu řešili. V závorce je výsledek a doporučené strategie.

Úlohy 4 a 5 jsou z hlediska matematického „stejné" (izomorfní), ale jsou náročné na uzření dvojic a propojení na předchozí úlohy. Učitel vyzve žáky po vyřešení úloh jejich vlastním způsobem k tomu, aby hledali, co mají s předchozími úlohami společného. V úloze 4 jsou to dvojice čísel, která označují pořadí kroků nahoru, v úloze 5 jde o pořadí, v jakém jsou umístěny červené krychle.

Úloha 1.

Do turnaje ve stolním tenise se přihlásilo 10 chlapců. V turnaji hraje každý s každým. Kolik zápasů se v turnaji odehraje?

[Výsledek: 45 dvojic. Strategie: A_Sehrávka – obloučky, B_Tabulka – turnaj, C_Tabulka – závislost]

Úloha 2.

Kolik různých úseček s krajními body ve dvou z 10 bodů lze vytvořit?

[Výsledek: 45 různých úseček. Strategie: A_Sehrávka – obloučky, B_Tabulka – turnaj, C_Tabulka – závislost]

Úloha 3.

Na schůzi 10členného výboru přicházejí členové postupně. Každý, kdo přijde, si podá ruku s každým již přítomným. Kolik podání rukou se odehraje?

[Výsledek: 45 podání rukou. Strategie: A_Sehrávka – obloučky, B_Tabulka – turnaj, C_Tabulka – závislost]

Úloha 4.

Kolika různými nejkratšími cestami můžeš jít z domu D do školy Š (viz obrázek níže)?

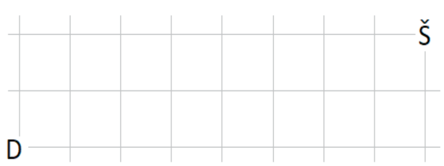
[Výsledek: 45]

Úloha 5.

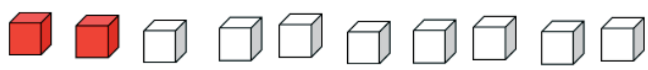
Kolik různých věží lze postavit ze 2 červených a 8 bílých krychlí (viz obrázek níže)?

[Výsledek: 45]

Obr. k úloze 4.



Obr. k úloze 5.



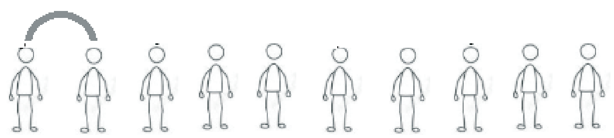
Pracovní list k úloze Narozeninová oslava II
(pro 5 až 7. ročník)

Na narozeninové oslavě se setkalo 10 spolužáků a každý si s každým ťukl na zdraví skleničkou limonády. Kolik ťuknutí na párty zaznělo?

Dokončete následující řešení Aleny, Bena a Cyrila.

Strategie Alena

ALENA: *Chtěla jsem zorganizovat 10 spolužáků, abychom si situaci zahráli. Ale bylo nás pouze 5. Já jsem začala a ťukla jsem si se všemi 4. Pak byl na řadě Béďa a už si ťuknul jen se 3 zbylými. Dále si ťukal Cyril a nakonec si ťuknul Dan s Emilkou. Ani jsme to nemuseli dohrát a už jsme byli schopni si nakreslit, jak by to probíhalo, kdyby nás bylo 10. Takhle jsem začala a pak už bylo vše jasné.*



Strategie Ben

BEN: *Udělal jsem si tabulku, jako když organizuji ve škole šachový turnaj pro 10 hráčů. Ani jsem ji nemusel vyplnit celou a bylo mi jasné, jak to počítat.*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	X	AB	AC	AD						
B	-	X	BC							
C	-	-	X							
D	-			X						
E					X					
F						X				
G							X			
H								X		
I									X	
J										X

Strategie Cyril

CYRIL: *Řekl jsem si, že kdyby byli jen 3 spolužáci, tak by byla 3 ťuknutí, kdyby byli 4 spolužáci, tak by bylo 6 ťuknutí. Pak jsem si raději udělal tabulku, a ještě pomocí obrázku jsem zjistil, že když si ťuká 5 spolužáků, ozve se 10 ťuknutí. V tabulce jsem si všiml, jak čísla ve druhém sloupečku rostou. Pak jsem to snadno dopočítal.*

počet žáků	*počet ťuknutí*
2	1
3	3
4	6
5	10
6	
7	
8	
9	
10	

Evaluační dotazník B

Názvy strategií, které jste ve skupině dokončovali: ____________________________________

Ze všech strategií se mi nejvíce líbila strategie s názvem ______________, protože ____________

____.

Překvapila mě strategie s názvem ______________, protože __________________________.

Měl/a jsem problém porozumět strategii s názvem ________________.

Nikdy bych nepoužil/a strategii s názvem ______________, protože _____________________.

Příště bych asi použil/a strategii s názvem ______________.

Napadla mě ještě jiná strategie: ANO / NE. Popíšu ji:

Metodický list k úloze Divadlo

4. až 7. ročník

Téma: propedeutika soustavy dvou rovnic o dvou neznámých

V divadle prodali za dva dny 128 vstupenek na dětské představení. Oba dva dny bylo divadlo vyprodáno. Vstupenek pro děti prodali každý den třikrát více než vstupenek pro dospělé. Kolik vstupenek pro děti a kolik vstupenek pro dospělé každý den prodali?

Podobné slovní úlohy bývají na 2. stupni základní školy řešeny soustavou dvou rovnic o dvou neznámých. Označíme-li počet vstupenek pro dospělé x a počet vstupenek pro děti y, dostaneme rovnice $x + y = 128$ a $3x = y$. Pro některé žáky může být obtížné vyjádřit vztahy mezi konkrétními číselnými údaji v popsané situaci pomocí písmen. Proto nabízíme tři strategie, které žákům pomohou porozumět situaci a úlohu vyřešit, aniž by sestavovali rovnice. Úlohu tak můžeme použít jako propedeutickou v nižším ročníku, dříve než se probírají soustavy rovnic. Úloha může být užitečná i pro žáky, kteří již rovnice znají, protože jim nabízené strategie umožní pochopit podstatu řešení těchto typů úloh.

Úloha je komplikována tím, že hledáme dva neznámé údaje, přičemž vazba *třikrát více než* (jestliže $3A = B$, pak B je třikrát větší než A) je náročná na porozumění zejména u mladších žáků. Zatímco údaje jsou uvedeny za dva dny, výsledek je potřeba uvést za jeden den. Je důležité si uvědomit, že sdělení *divadlo bylo vyprodáno oba dva dny* znamená, že oba dva dny se prodal stejný počet lístků.

Z hlediska jazykového je úloha komplikována nevyjádřenými podměty, pasivní konstrukcí (bylo prodáno), přítomností srovnávací konstrukce *více než* a nutností interpretace sdělení *oba dny* vs. *každý den*.

Společná práce s textem slovní úlohy

Porozumění textu úlohy	Rozvoj jazykové gramotnosti
1. Zdůvodni, proč se asi rozlišují vstupenky pro děti a pro dospělé.	5. Je z textu úlohy patrné, kdo přesně vstupenky na představení prodával? Své tvrzení zdůvodni.

2. Kterých vstupenek prodali více? Dětských vstupenek, či vstupenek pro dospělé?

3. Vyjádři jinými slovy, že divadlo bylo vyprodáno. Je tato informace důležitá?

4. Řekni vlastními slovy, o čem úloha je. Napiš si nejprve osnovu v bodech.

6. Přečti si větu *Oba dva dny bylo divadlo vyprodáno*. Jsou zde všechna slova stejně důležitá?

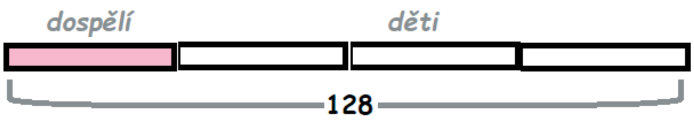
Řešení

(1) Děti mají zpravidla nárok na slevu. **(2)** Dětských. **(3)** Otevřená úloha. Ano, jinak by byla úloha neřešitelná. **(4)** Otevřená úloha. **(5)** Není, v textu se vyskytují všeobecné podměty a trpný rod (tak to ale žáci ve 4. až 6. ročníku ještě neoznačí). **(6)** Ne, dva je redundantní, pokud se uvede oba dny je jasné, že se jedná o dva.

Přehled a rozbor jednotlivých nedokončených řešitelských strategií

Strategie A_Adam (Proužek)

Adam: *Nakreslil jsem si proužek „dospělí". To mi znázornilo počet lístků prodaných dospělým. K němu jsem dokreslil ještě tři další a už to bylo jasné.*



Adam si vizualizoval počet prodaných vstupenek pro dospělé úsečkou a k ní přidal tři další shodné úsečky, kterými zobrazil třikrát větší počet prodaných vstupenek pro děti. Bylo jasné, že celkový počet je 128 vstupenek. Adam tím získal vhled do situace.

Očekáváme, že žáci z obrázku Adama zjistí, že celkový počet vstupenek (128) je rozdělen na čtyři stejné části. Jedna část (jedna čtvrtina) znázorňuje počet vstupenek pro dospělé, zbytek (tedy tři čtvrtiny) znázorňuje počet vstupenek pro děti. Tedy 128 vydělí čtyřmi, tj. 32 vstupenek za dva dny je pro dospělé, tedy za jeden den je to 16 vstupenek pro dospělé. Počet vstupenek pro děti za jeden den lze vypočítat různými způsoby, např. 16 · 3 = 48 vstupenek za jeden den.

Strategie B_Blanka (Tabulka)

Blanka: *Vytvořila jsem si tabulku a začala jsem ji vyplňovat postupně, jako kdyby přišel do divadla nejdříve 1 dospělý a 3 děti, tedy celkem 4 osoby. Takhle jsem pokračovala až k 5 dospělým, kdy mi vyšlo 20 osob celkem. Všimla jsem si, že když například sečtu čísla ve druhém a třetím řádku, tak dostanu čísla v pátém řádku, a také když sečtu první řádek a dvojnásobek druhého řádku, dostanu také pátý řádek. Tak už mě napadlo, jak mohu dostat řádek, kde je celkem 128 osob.*

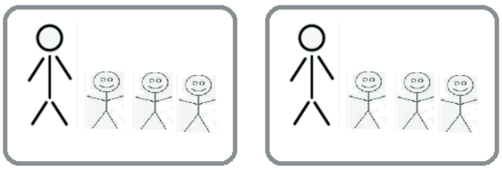
dospělí	*děti*	*celkem*
1	*3*	*4*
2	*6*	*8*
3	*9*	*12*
4	*12*	*16*
5	*15*	*20*

Blanka ráda pracuje s čísly. Získává vhled do situace pomocí číselných údajů uspořádaných v tabulce. Všimla si, že čísla v každém sloupci pravidelně rostou, a poznala některé vztahy v této struktuře čísel. Z nich pak vyvodila čísla na řádku, kde bude celkem 128 osob.

Očekáváme, že žáci spolu s Blankou budou zkoumat strukturu tabulky a nejdříve ověří, zda má Blanka pravdu. Mohou najít různé možnosti, jak se dostanou ke 128 ve třetím sloupci Celkem. Např. vynásobí deseti čísla ve 3. řádku a přičtou k němu čísla ve 2. řádku. Tedy vyjde 30 + 2 jako počet dospělých a 90 + 6 jako počet dětí. Nebo mohou čísla v 5. řádku vynásobit šesti a k nim přičíst čísla ve 2. řádku. Nebo mohou vynásobit třiceti čísla v 1. řádku a přičíst čísla ve 2. řádku. Výsledek je počet vstupenek za dva dny, tedy je nutné výsledek vydělit dvěma.

Strategie C_Cyril (Skupinky)

Cyril: *Nakreslil jsem si skupinku osob – jeden dospělý a tři děti, jak jdou spolu do divadla. Když jsem si nakreslil druhou skupinku, bylo mi jasné, jak získat počet dospělých. Musím dělit…*



Cyrilovi pomohlo nakreslení skupinky čtyř osob – 1 dospělý a 3 děti. Uvědomil si, že v každé skupince je jeden dospělý, tedy platí, že kolik je skupinek, tolik je dospělých. Počet dětí již dopočítal snadno.

Žáci mají za úkol zjistit, kolik skupinek po čtyřech mohou vytvořit ze 128 osob. Počet skupinek je stejný jako počet dospělých. Tedy 128 : 4 = 32, což je počet dospělých za dva dny, 16 dospělých za jeden den. A počet dětí za jeden den je 16 · 3 = 48.

Z pilotáže ve 4. ročníku vyplynulo, že žáci preferovali nejvíce strategii Cyril (*mi přijde přehledná; je dobře srozumitelná; dobře se mi to počítá; bylo to hezky vidět; vyznám se v tom*) a Adam (*je docela lehká; dá se s ním dobře hrát; mi vyhovovala*). Strategie Blanka se jim zdála zdlouhavá. Z dalších pilotáží vyplynulo, že strategie, které využívají tabulku, zde strategie Blanka, spíše oceňují starší žáci (od 6. roč. výše), (*pro mě je lehčí než ty ostatní; je jednoduchá a rychlá; jsem ji nejrychleji pochopil*). Domníváme se, že příčinou je fakt, že data uspořádaná v tabulce poskytují vhled do vazeb mezi číselnými údaji a snadněji vyvodí obecný vztah mezi nimi.

Návazná práce – další úlohy

Učitel žákům předloží další úlohu a doporučí jim, jakou strategií mají úlohu řešit. Kromě zde nabídnutých může využít i těch, které vymysleli žáci, pokud úlohu řešili. V závorce je výsledek a doporučené strategie.

Úloha 1.

V pomerančové šťávě je třikrát více vody než ovocného koncentrátu. Ve stánku na koupališti prodali za 3 dny celkem 156 litrů nápoje. Kolik litrů pomerančového koncentrátu spotřebovali?

[Výsledek: 39 litrů pomerančového koncentrátu. Strategie: A_Proužek, B_Tabulka, C_Skupinky]

Úloha 2.

Dva kamarádi Petr a Pavel si porovnávali své naposledy přečtené knížky. Petr zjistil, že jeho knížka má třikrát méně stránek než knížka Pavla a že dohromady přečetli 552 stránek. Kolik stránek musí přečíst Petr, aby přečetl stejný počet stran jako Pavel?

[Výsledek: 276 stránek. Strategie: A_Proužek, B_Tabulka, C_Skupinky]

Úloha 3.

V době covidu-19 v roce 2020 poklesl v jedné cestovní agentuře prodej zájezdů pětinásobně proti předchozímu roku. Za dva roky 2019 a 2020 celkem prodali 6 990 zájezdů. Kolik zájezdů prodali každý rok?

[Výsledek: za rok 2019 prodali 5 825 zájezdů a za rok 2020 prodali 1 165 zájezdů. Strategie: A_Proužek, B_Tabulka, C_Skupinky]

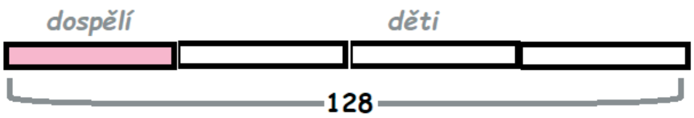
Pracovní list k úloze Divadlo

V divadle prodali za dva dny na dětské představení 128 vstupenek. Oba dva dny bylo divadlo vyprodáno. Vstupenek pro děti prodali každý den třikrát více než pro dospělé. Kolik prodali každý den vstupenek pro děti a kolik pro dospělé?

Dokončete řešení Adama, Blanky a Cyrila.

Strategie Adam

ADAM: *Nakreslil jsem si proužek „dospělí“. To mi znázornilo počet lístků prodaných dospělým. K němu jsem dokreslil ještě tři další a už to bylo jasné.*



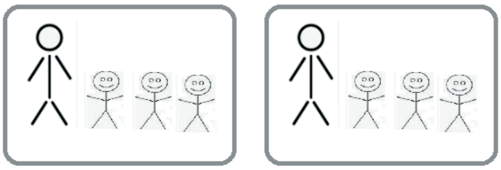
Strategie Blanka

BLANKA: *Vytvořila jsem si tabulku a začala jsem ji vyplňovat postupně, jako kdyby přišel do divadla nejdříve 1 dospělý a 3 děti, tedy celkem 4 osoby. Takhle jsem pokračovala až k 5 dospělým, kdy mi vyšlo 20 osob celkem. Všimla jsem si, že když například sečtu čísla ve druhém a třetím řádku, tak dostanu čísla v pátém řádku, a také když sečtu první řádek a dvojnásobek druhého řádku, dostanu také pátý řádek. Tak už mne napadlo, jak mohu dostat řádek, kde je celkem 128 osob.*

dospělí	*děti*	*celkem*
1	*3*	*4*
2	*6*	*8*
3	*9*	*12*
4	*12*	*16*
5	*15*	*20*

Strategie Cyril

CYRIL: *Nakreslil jsem si skupinku osob – jeden dospělý a tři děti, jak jdou spolu do divadla. Když jsem si nakreslil druhou skupinku, bylo mi jasné, jak získat počet dospělých. Musím dělit…*



Evaluační dotazník B

Názvy strategií, které jste ve skupině dokončovali: ______________________________

Ze všech strategií se mi nejvíce líbila strategie s názvem ________________, protože ____________

____.

Překvapila mě strategie s názvem ________________, protože ______________________.

Měl/a jsem problém porozumět strategii s názvem __________________.

Nikdy bych nepoužil/a strategii s názvem _______________, protože _______________________.

Příště bych asi použil/a strategii s názvem ________________.

Napadla mě ještě jiná strategie: ANO / NE. Popíšu ji:

Metodický list k úloze Dva traktory

8. až 9. ročník — Téma: úlohy o společné práci

Traktor Zetor zorá pole za 20 hodin a traktor John Deere zorá stejné pole za 12 hodin. Farmář vzhledem k blížící se bouřce potřebuje zorat pole co nejrychleji a pošle na pole oba traktory. Jak dlouho bude trvat zorání pole, když budou orat oba traktory současně?

Je to typická slovní úloha o společné práci. Víme, za jakou dobu zorá pole každý traktor zvlášť, a otázkou je, za jak dlouho zorají pole oba traktory najednou. V úloze se pracuje s číslem jako veličinou (čas) a je třeba zjistit, jakou část pole zorají oba traktory za hodinu. Je potřeba, aby žáci sčítali a dělili zlomky. Z hlediska jazykového úloha obsahuje mnoho nadbytečných informací (např. názvy traktorů, informace o počasí) a všechny věty jsou souvětí. Komplikaci může způsobit i slovo *současně*.

Společná práce s textem slovní úlohy

Porozumění textu úlohy	Rozvoj jazykové gramotnosti
1. Popiš svými slovy situaci, kdy budou traktory orat pole současně.	5. Označ slova, která mají stejný slovní základ, a přitom nejsou stejného slovního druhu.
2. Když pojedou traktory současně, budou potřebovat delší/kratší čas, než když pojedou každý zvlášť?	6. Ve kterém souvětí je věta vedlejší?
3. Když si nakreslíš pole, jak bys vyznačil/a jeho část, kterou traktor Zetor zorá za 1 hodinu? A jak by na stejném obrázku vypadala část, kterou zorá za hodinu John Deere?	
4. Pokus se co nejvíce zkrátit text, tak abys neztratil/a žádné informace k vyřešení úlohy a zároveň aby text neztratil smysl.	

Řešení

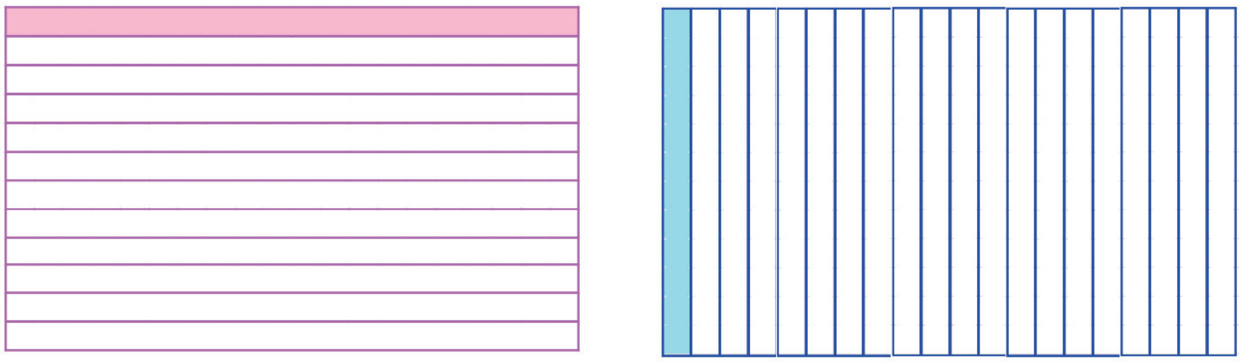
(1) Otevřená úloha. **(2)** Kratší čas. **(3)** Pro Zetor jako jednu dvacetinu a pro John Deere jako jednu dvanáctinu pole. **(4)** Zetor zorá pole za 20 hodin a traktor John Deere zorá stejné pole za 12 hodin. Jak dlouho bude trvat zorání pole, když budou orat oba traktory současně? **(5)** Zorám nebo zorat (slovesa) – zorání (podstatné jméno). **(6)** Ve třetím.

Přehled a rozbor jednotlivých nedokončených řešitelských strategií

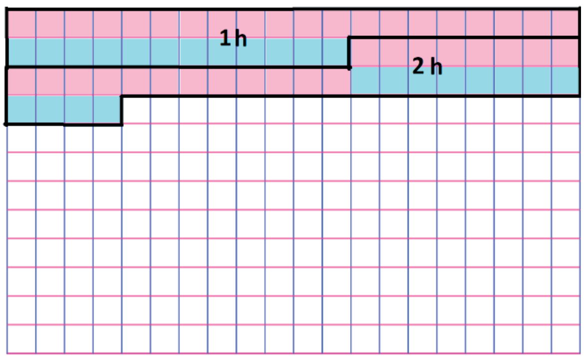
Strategie A_Aneta (Rozdělení obdélníku)

Aneta: *Vyznačila jsem si celé pole a nejdříve ho rozdělila na 12 růžových pruhů. Jeden pruh pole oře traktor John Deere jednu hodinu, je to jedna dvanáctina pole. Podobně pro Zetor – pole jsem rozdělila na 20 modrých pruhů, tedy jeden pruh oře traktor Zetor za jednu hodinu a je to jedna dvacetina pole.*

John Deere Zetor



A pak jsem si to přenesla do jednoho obrázku. Celé pole se tak rozdělilo na 20 x 12 obdélníčků. Traktor John Deere tak zoral na mém obrázku za hodinu 20 obdélníčků, to jsem vyznačila růžově. Zetor 12 obdélníčků, to jsem vyznačila modře. Tak jsem pokračovala dál, …

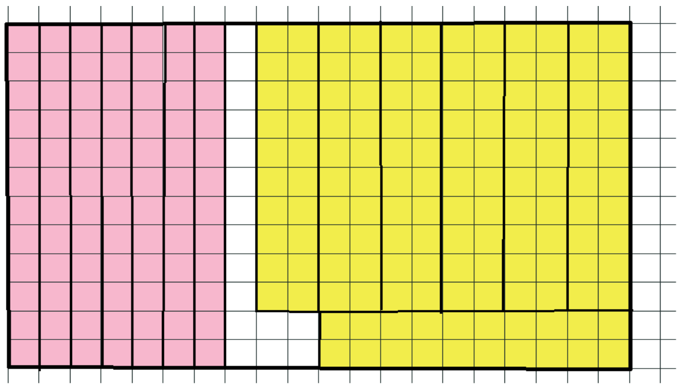


Aneta si pomocí obrázku ujasnila, jakou část pole zorá každý traktor za jednu hodinu tím, že rozdělila pole (obdélník) na 12, resp. 20 stejných pruhů. Zakreslením obou podmínek do jednoho obrázku tak vzniklo, že jeden růžový pruh je 20 obdélníčků a jeden modrý pruh je 12 obdélníčků, a tedy za jednu hodinu dohromady zorají 32 obdélníčků. Celé pole je pokryto $12 \cdot 20 = 240$ obdélníčky a na jeho zorání je potřeba $240 : 32 = 7{,}5$ hodin.

Očekáváme, že žáci budou pokračovat ve vyznačování skupin po 32 obdélníčcích za každou uplynulou hodinu. Po 7. hodině zůstane jen 16 polí volných, což představuje práci na 0,5 hodiny. Tedy oba traktory společně zorají pole za 7,5 hod.

Strategie B_Boris (Čtverečkovaný papír)

Boris: *Já jsem si to pole znázornil na čtverečkovaném papíře jako obdélník 20 x 12, protože na tom poli se mi budou dobře vyznačovat části, které traktory zoraly za hodinu. Takže za první hodinu traktor Zetor zorá 12 čtverečků a traktor John Deere zorá 20 čtverečků, pak jsem vyznačil druhou hodinu, a tak jsem pokračoval a už bylo vše jasné.*



Boris si vyznačil růžovou barvou, že za první hodinu traktor Zetor „zorá" 12 čtverečků, tj. 1/20 pole, a žlutou barvou 20 čtverečků, které za první hodinu „zorá" traktor John Deere, tj. 1/12 pole. Boris pak pokračoval růžovou barvou a vyznačil dalších 12 čtverečků a žlutou barvou dalších 20 čtverečků. To se mu podařilo 7krát, tedy vyznačil, kolik čtverečků oba traktory „zoraly" za 7 hodin. Pak mu to bylo jasné.

Žáci vidí, že oba traktory za jednu hodinu „zorají" 32 (12 + 20) čtverečků a za 7 hodin oba traktory „zorají" 224 (7 · 12 + 7 · 20) čtverečků. Zjistí, že zbývá 16 (240 – 224) nevybarvených čtverečků, což je polovina ze 32. Tedy 16 čtverečků oba traktory „zorají" za půl hodiny. Celé pole zorají oba traktory za 7 hodin a 30 minut.

Strategie C_Cecilka (Tabulka)

Cecilka: *Já jsem pracovala s konkrétní rozlohou pole. Aby se mi to dobře počítalo, tak jsem si našla nejmenší společný násobek čísel 20 a 12, to je 60. Zvolila jsem si tak pole o rozloze 60 ha (hektarů). Zjistila jsem, kolik hektarů zorá za hodinu každý traktor, a vytvořila jsem si tabulku, do které jsem doplňovala, jak probíhala orba a kolik pole zůstalo nezoráno. Dál to bylo jasné …*

počet hodin	*1*	*2*	*3*	*4*				
Zetor (v ha)	*3*	*6*	*9*					
John Deere (v ha)	*5*	*10*	*15*					
oba celkem (v ha)	*8*	*16*	*24*	*32*				
zbývá zorat (v ha)	*52*	*44*	*36*	*28*				

Cecilka měla problém pracovat s neurčitou rozlohou pole, proto si ji konkrétně zvolila. Věděla, že výhodné bude zvolit takové číslo, které je dělitelné jak číslem 12, tak číslem 20. Při volbě rozlohy pole 60 hektarů by traktor John Deere zoral za jednu hodinu 5 ha, Zetor 3 ha a oba dohromady 8 ha. Průběh toho, kolik hektarů pole je zoráno za každou hodinu, si Cecilka zaznamenala do tabulky.

Žáci v tabulce vidí, že za jednu hodinu je zoráno celkem 8 ha a ještě 52 ha zbývá zorat. Žáci postupně jako Cecilka doplňují tabulku a v dolním řádku sledují, kolik hektarů ještě zbývá zorat. Za 7 hodin oba traktory zorají 56 ha a zbývá zorat 4 ha. To je pro oba traktory práce na půl hodiny.

počet hodin	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*7,5*
Zetor (v ha)	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*	*22,5*
John Deere (v ha)	*5*	*10*	*15*	*20*	*25*	*30*	*35*	*37,5*
oba celkem (v ha)	*8*	*16*	*24*	*32*	*40*	*48*	*56*	*60*
zbývá zorat (v ha)	*52*	*44*	*36*	*28*	*20*	*12*	*4*	*0*

Strategie D_Dan (Výpočet – zlomky)

Dan: *Bylo mi jasné, že John Deere zoral za hodinu 1/12 pole a Zetor 1/20 pole. Tedy oba dohromady zoraly za jednu hodinu 1/12 + 1/20 = 8/60 = 2/15 pole. A pak už bylo vše jasné.*

Dan si uvědomil, že traktor John Deere zorá za 1 hodinu 1/12 pole a traktor Zetor 1/20 pole. Tedy už pak věděl, že když sečte 1/12 a 1/20 pole, tak zjistí, jakou část pole zorají oba traktory za jednu hodinu, tedy zorají 1/12 + 1/20 = 8/60 = 2/15 pole.

Očekáváme, že žáci, když už znají část pole, která je zorána za jednu hodinu, zjistí, kolikrát se ta část vejde do celku, čili je nutné vydělit celek částí, tzn. 1 : 2/15 = 15/2 = 7,5. Tedy oba traktory zorají pole za 7,5 hodiny.

Pilotáž této úlohy potvrdila mnohé myšlenky, které byly uvedeny výše. Nejoblíbenější strategie žáků dvou tříd 9. ročníku byly dvě: Aneta a Boris. Názornost těchto strategií zřejmě dala žákům dobré porozumění, a tak většina z nich by příště volila strategii Dana – výpočet pomocí zlomků. Strategie Cecilka překvapila nejvíce žáků (*jsem ji nepochopil; je zdlouhavá a není mi jasné, jak Cilka zjistila rozlohu pole; není špatná, ale taková tabulka by mě nenapadla.*) Domníváme se, že to je tím, že Cecilka si zvolila konkrétní rozlohu pole. Jedna učitelka po pilotáži této úlohy napsala: „Jsem překvapená, že moji žáci dokáží vyřešit úlohy o společné práci a skoro jsem je nemusela nic učit."

Návazná práce – další úlohy

Učitel žákům předloží další úlohu a doporučí jim, jakou strategií mají úlohu řešit. Kromě zde nabídnutých může využít i těch, které vymysleli žáci, pokud úlohu sami řešili. V závorce je výsledek a doporučené strategie.

Úloha 1.

Vojtu a Janu poprosila maminka, aby jí došli do lesa nasbírat do džbánku lesní ovoce do knedlíků. Jana by sbírala sama 3 hodiny, než by naplnila džbánek, a Vojta by stejné množství ovoce sbíral 6 hodin. Jak dlouho budou sbírat lesní ovoce do džbánku spolu?

[Výsledek: 2 hodiny. Strategie: A_Rozdělení obdélníku, B_Čtverečkovaný papír, C_Tabulka, D_Výpočet – zlomky]

Úloha 2.

V zednické firmě jsou tři dělníci. První dělník by splnil novou zakázku za 2 směny, druhý za 3 směny a třetí za 6 směn. Za jak dlouho bude hotova zakázka, když se zapojí všichni tři dělníci najednou?

[Výsledek: 1 směna. Strategie: A_Rozdělení obdélníku, B_Čtverečkovaný papír, C_Tabulka, D_Výpočet – zlomky]

Úloha 3.

Nádrž se naplní jedním přítokem za 20 minut, druhým za 30 minut. Jak dlouho se bude plnit nádrž, jsou-li otevřeny všechny tři přítoky? Třetím přítokem se naplní stejně rychle, jako když jsou otevřeny první dva.

[Výsledek: 6 minut. Strategie: A_Rozdělení obdélníku, B_Čtverečkovaný papír, C_Tabulka, D_Výpočet – zlomky]

Pracovní list k úloze Dva traktory

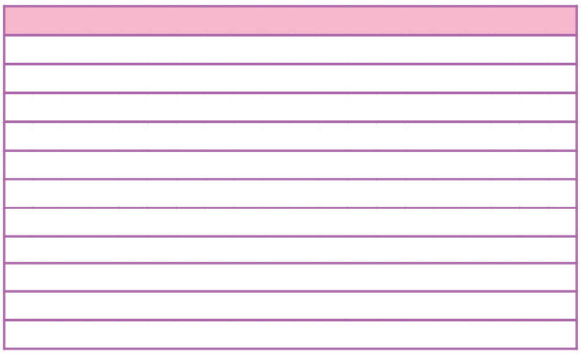
Traktor Zetor zorá pole za 20 hodin a traktor John Deere zorá stejné pole za 12 hodin. Farmář vzhledem k blížící se bouřce potřebuje zorat pole co nejrychleji a pošle na pole oba traktory. Jak dlouho bude trvat zorání pole, když budou orat oba traktory současně.

Dokončete následující řešení Anety, Borise, Cecilky a Dana.

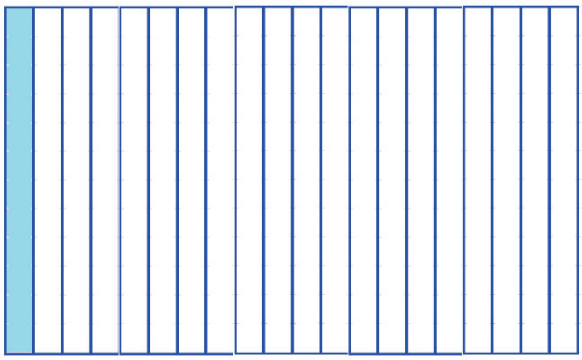
Strategie Aneta

Aneta: *Vyznačila jsem si celé pole a nejdříve ho rozdělila na 12 růžových pruhů. Jeden pruh pole oře traktor John Deere jednu hodinu, je to jedna dvanáctina pole. Podobně pro Zetor – pole jsem rozdělila na 20 modrých pruhů, tedy jeden pruh oře traktor Zetor za jednu hodinu a je to jedna dvacetina pole.*

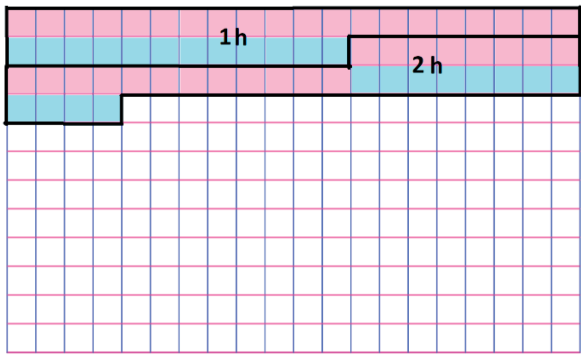
John Deere



Zetor

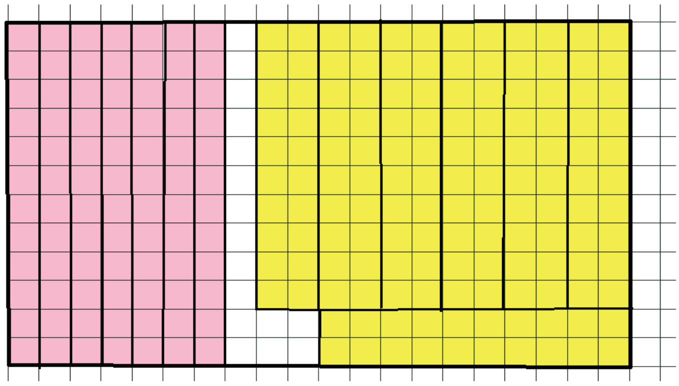


A pak jsem si to přenesla do jednoho obrázku. Celé pole se tak rozdělilo na 20 x 12 obdélníčků. Traktor John Deere tak „zoral" na mém obrázku za hodinu 20 obdélníčků, to jsem vyznačila růžově. Zetor 12 obdélníčků, to jsem vyznačila modře. Tak jsem pokračovala dál, …



Strategie Boris

Boris: *Já jsem si to pole znázornil na čtverečkovaném papíře jako obdélník 20 x 12, protože na tom poli se mi budou dobře vyznačovat části, které traktory zoraly za hodinu. Takže za první hodinu traktor Zetor zorá 12 čtverečků a traktor John Deere zorá 20 čtverečků, pak jsem vyznačil druhou hodinu, a tak jsem pokračoval a už bylo vše jasné.*



Strategie Cecilka

Cecilka: *Já jsem pracovala s konkrétní rozlohou pole. Aby se mi to dobře počítalo, tak jsem si našla nejmenší společný násobek čísel 20 a 12, to je 60. Zvolila jsem si tak pole o rozloze 60 ha (hektarů). Zjistila jsem, kolik hektarů zoře za hodinu každý traktor, a vytvořila jsem si tabulku, do které jsem doplňovala, jak probíhala orba a kolik pole zůstalo nezoráno. Dál to bylo jasné …*

počet hodin	*1*	*2*	*3*	*4*				
Zetor (v ha)	*3*	*6*	*9*					
John Deere (v ha)	*5*	*10*	*15*					
oba celkem (v ha)	*8*	*16*	*24*	*32*				
zbývá zorat (v ha)	*52*	*44*	*36*	*28*				

Strategie Dan

Dan: *Bylo mi jasné, že John Deere zoral za hodinu 1/12 pole a Zetor 1/20 pole. Tedy oba dohromady zoraly za jednu hodinu 1/12 + 1/20 = 8/60 = 2/15 pole. A pak už bylo vše jasné.*

Evaluační dotazník B

Názvy strategií, které jste ve skupině dokončovali: ______________________________

Ze všech strategií se mi nejvíce líbila strategie s názvem ______________, protože __________

____.

Překvapila mě strategie s názvem ______________, protože ____________________.

Měl/a jsem problém porozumět strategii s názvem ______________.

Nikdy bych nepoužil/a strategii s názvem ______________, protože ______________.

Příště bych asi použil/a strategii s názvem ______________.

Napadla mě ještě jiná strategie: ANO / NE. Popíšu ji:

Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol prostřednictvím řešení slovních úloh

Nedokončené strategie

Darina Jirotková, Jana Slezáková,
Alena Kinclová, Martina Šmejkalová

Grafická úprava:
MgA. Denisa Kokošková

Vydala Univerzita Karlova — Pedagogická fakulta
Rok vydání: 2023
Počet stran: 70
Formát: A4
1. vydání

ISBN 978-80-7603-437-2