

Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol prostřednictvím řešení slovních úloh

Porovnávání

Nada Vondrová, Martina Šmejkalová

*Tento materiál tvoří přílohu
k Metodice Podpora integrace matematické, čtenářské
a jazykové gramotnosti u žáků základních škol
prostřednictvím řešení slovních úloh
(Vondrová et al., 2023).*



PEDAGOGICKÁ
FAKULTA
Univerzita Karlova

SLOVNÍ
ÚLOHY

Metodický materiál vznikl s finanční podporou projektu TAČR TL03000469 Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol.

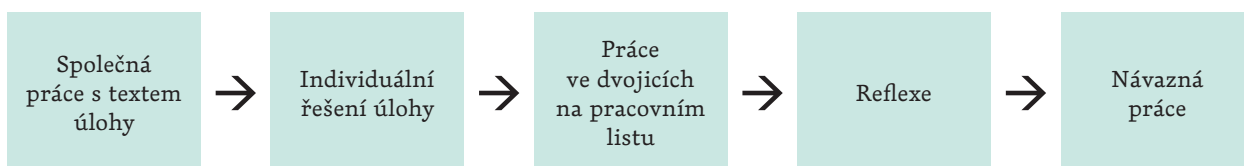


						
společná práce	individuální práce	práce ve dvojicích	práce ve skupinách	porozumění textu	rozvoj jazykové gramotnosti	poznatky z pilotáže

Metodický materiál typu Porovnávání (POR)

V těchto metodických materiálech je u každé úlohy žákům nabídnuta dvojice řešení fiktivních žáků. Tato řešení mohou být jak správná, tak nesprávná. Cílem je navodit proces porovnávání – žák porovnává předložená řešení, ale také je implicitně porovnává s tím, jak o úloze uvažoval on sám. Žák má zjistit, zda je řešení správně (a tedy pochopit předloženou strategii řešení), nebo ne (a tedy identifikovat chybu a případně ji opravit). V nesprávných řešeních jsou zařazeny chyby, jichž se žáci obvykle dopouštějí.

Doporučené použití



Část 1 — Společná práce s textem slovní úlohy



Učitel předloží žákům úlohu a nechá jim čas na přečtení. Žáci se v této fázi snaží porozumět situaci popsané v úloze, ale úlohu neřeší (je možné úlohu zadat bez otázky). Učitel otevře diskusi, jejímž cílem je zjistit, jak žáci předkládanému zadání slovní úlohy rozumí. K tomu může využít úkoly a otázky, které jsou uvedeny v kapitole 3 úvodního textu Metodiky, a otázky podporující porozumění textu dané úlohy, které jsou uvedeny na metodickém listu. Současně může otázkami aktivovat metakognitivní uvažování žáků. V této fázi lze také zapojit učitele českého jazyka, pro něhož jsou u každé úlohy uvedeny jazykové úkoly. Podrobněji je možné se o zapojení učitele českého jazyka dočíst v kapitole 4 úvodního textu Metodiky.¹



Některé úkoly (např. otázky, u nichž je nabídnuto více odpovědí, nebo různá tvrzení, o jejichž platnosti mají žáci rozhodnout) týkající se textu slovní úlohy by měli mít žáci k dispozici v písemné podobě (např. na dataprojektoru nebo na tabuli). Je pro ně obtížné je udržet v paměti.

Učitel by se neměl spokojit jen se správnou odpovědí, ale žáci by měli své odpovědi zdůvodnit. Např. učitel by měl žáky požádat, aby přečetli nahlas tu část textu, která jejich odpověď podporuje.



Část 2 — Individuální řešení úlohy

Učitel vyzve žáky, aby úlohu řešili. Nemusí ji nutně dořešit celou, smyslem je, aby se o to alespoň pokusili a dokázali pak lépe porozumět řešení fiktivního žáka,

¹ Obecná poznámka ke všem jazykovým úkolům: často po žácích požadujeme práci se slovníky. Problém je, že výkladové slovníky přiměřené žákům základní školy nejsou elektronicky přístupné – zde tedy předpokládáme spolupráci s učiteli: <https://lexiko.ujc.cas.cz/>

které jim bude předloženo. Učitel může žáky při řešení podporovat úkoly, jež jsou uvedeny v kapitole 3 úvodního textu Metodiky.



Tato část může být vnímána různě. Pokud žáci úlohu dořeší, získají do ní vhled a mohou pak snáze porovnat předložená řešení s vlastním. Někteří žáci se však poté, co v jednom z předložených řešení uviděli svůj výsledek, toto řešení ani nepokusili pochopit a označili ho automaticky za správné. V takovém případě je musí učitel vést k tomu, aby kroky předloženého řešení vysvětlili.



Část 3 – Práce ve dvojicích s pracovním listem

Žáci budou pracovat ve dvojicích. Dostanou vytištěný pracovní list, na kterém je dvojice řešení formou okomentovaných jednotlivých kroků.² Mohou to být řešení správná, či nesprávná, či jejich kombinace. U některých úloh uvádíme i více takových dvojic řešení. Variantou je dát různým skupinám žáků různé dvojice řešení.



Doporučujeme, aby při prvním setkání žáků s materiálem typu Porovnávání učitel zdůraznil, že někdy budou obě řešení správně, někdy bude jedno špatně, ale že také mohou být obě špatně a že úkolem je řešení pochopit a případnou chybu odhalit. Osvědčilo se také požádat žáky, aby si zahráli na učitele a opravili navržená řešení.

Cílem této aktivity je navodit proces porovnávání předložených strategií řešení. Učitel tomu může pomoci cílenými otázkami, které položí celé třídě nebo dvojicím žáků: *Jak řešil úlohu Bi-voj? Jak řešil úlohu Kazimír? Porovnej jejich řešení. Kdo řeší úlohu správně? Pokud je v řešení chyba, najdi ji a oprav. Jak asi vznikla? Porovnej tato řešení se svým řešením této úlohy. Které z řešení ti vyhovuje více a proč?*

Alternativou je dát žákům otázky v písemné podobě a požádat je, aby na ně písemně odpověděli. V každém případě je nutné žádat po žácích i zdůvodnění jejich úvah a závěrů.



Zdá se, že pro žáky je jednodušší porovnávat jedno špatné a jedno správné řešení. Úkol „Najdi v řešení chybu a vysvětli, jak vznikla“ je pro ně evidentně jednodušší než získat vhled do dvou správných způsobů řešení. Proto doporučujeme začít porovnáním špatného a správného řešení a porovnání dvou správných způsobů zařadit až poté, co žáci získají první zkušenosti s tímto typem materiálu.

Pokud mají obě řešení stejné výsledky a žáci zjistí, že první je správné, nemusí mít motivaci analyzovat i druhé. Učitel by je měl vést k tomu, aby dokázali odůvodnit jednotlivé kroky správ-

² Obrázky fiktivních žáků nakreslila Patricie Slaničková. Jména fiktivních žáků jsme volili spíše netradiční, aby nedošlo k tomu, že žáci budou rozebírat nesprávné řešení fiktivního žáka, který má stejné jméno jako někdo z nich. Mohlo by jim to být nepříjemné.

ných řešení a porovnat je se svým řešením: Podívej se, jak řešila úlohu Pavla. Ke každému kroku si udělej značku, podle toho, jak mu rozumíš. (✓... to bych udělal stejně, + ... to je zajímavý způsob, příště zkusím využít, — ... toto se mi nezdá, zde udělal žák chybu, ? ... tady jsem se ztratil, řešení nerozumím). U nesprávných řešení se učitel může zeptat, co by žáci řekli autorovi řešení, aby mu to pomohlo úlohu vyřešit. Tím jsou žádáni, aby své úvahy vysvětlili a podložili argumenty.



Mnohdy stačí obecný pokyn „okomentuj předložené postupy“. Žáci sami dopisují do řešení „fajfky“ tam, kde rozuměli, případně další poznámky. Zapisování poznámek jim umožní si zafixovat své úvahy o analyzovaném postupu. Příklad takových komentářů je na obrázku níže.

Práci s pracovním listem lze organizovat v závislosti na konkrétní třídě i v malých skupinách, individuálně či formou společné práce třídy. Další možností je zadat příslušný list žákům za domácí úkol a pokračovat částí 3 v další vyučovací hodině.



Podle velikosti třídy lze místo vytištění pracovního listu obě řešení promítnout. Má to však své nevýhody. Nemusí se zapojit všichni žáci a složitější řešení nebude jednoduché pochopit jen na základě dívání se na plátno. Žáci mohou mít potřebu si do pracovního listu něco napsat, škrtnout či podtrhnout či je učitel přímo povede k tomu, aby jednotlivé kroky řešení písemně odůvodnili. Pokud je škola vybavena tablety, mohou být pracovní listy žákům zprostředkovány na tabletech.

studenti..... x
dospělí y

ceny jízdenek:

dospělí 100 Kč
studenti 25 Kč

(I) $x + y = 60$
(II) $25x = 100y$

$\frac{x}{4} = y$

$x + \frac{x}{4} = 60 \quad | \cdot 4$

$5x = 240 \quad | : 5$

$x = 48$

Autobusem jelo 48 studentů.

BIVOJ

studenti..... x
dospělí y

ceny jízdenek:

dospělí 100 Kč
studenti 25 Kč

(I) $x + y = 60$
(II) $25x = 100y$

$\frac{x}{4} = y$

$x + \frac{x}{4} = 60 \quad | \cdot 4$

$5x = 240 \quad | : 5$

$x = 48$

Autobusem jelo 48 studentů.

SÁMO

Zjistím, kolik procent z ceny pro dospělé platí studenti.

Převodu na zlomek.

Studenti platí pouze čtvrtinu.

Takže jich musí být 4krát více než dospělých.

60 míst rozdělím na 5 částí.

Vynásobím číslem 4.

Mám výsledek.

48 studentů

PROVĚŘ

Nejdřív zkontroluji, kolik procent z ceny pro dospělé platí studenti.

Vhodné zvolím cenu jízdenky pro dospělé na 100 Kč a určit cenu pro studenty.

Sestavím soustavu dvou rovnic.

Z (II) vyjádřím y.

Dosadím do (I) a promysleím obě strany číslem 4.

Vydělím číslem 5.

Mám výsledek.

48 studentů



Část 4 — Reflexe

Učitel vyzve žáky, aby vysvětlili předložená fiktivní řešení (příslušnou strategii či chybu), a moderuje diskusi.



Pro společnou reflexi různých strategií je užitečné, pokud žáci oddělují postupy vzniklé v různé fázi práce. Např. vlastní řešení píše tužkou, řešení vytvořené ve dvojici propiskou a případné další řešení barevně.

U každé dvojice předložených řešení je zapsáno, co je jejich konkrétním poselstvím (např. konfrontace žáků s častou chybou nebo seznámení žáků s určitým způsobem řešení úlohy). Cílem reflexe je, aby si žáci toto poselství uvědomili. Předpokládáme, že zmíněná poselství se v diskusi objeví přirozeně a učitel se jen ujistí, že si třída uvědomí jejich důležitost. Pokud se tak nestane, může na ně zaměřit pozornost žáků cílenými otázkami.



Část 5 – Návazná práce

Poznátky, které žáci získali v předchozích etapách práce, by si měli upevnit tím, že je sami využijí v podobném kontextu. Např. pokud bylo cílem, aby se žáci seznámili s nějakou strategií řešení, doporučujeme, aby se s ní žáci v některé z dalších hodin znovu setkali. Např. by učitel mohl zadat jinou úlohu a požádat žáky, aby ji řešili právě tou strategií.

Jinou možností návazné práce je požádat žáky, aby sami vytvořili nějaké řešení (správné, či nesprávné) u dané slovní úlohy (či u jiné slovní úlohy). Další možností je vyzvat žáky k vytvoření podobné úlohy, kterou pak zadají spolužákovi či spolužačce.



Zejména u úloh pro 1. stupeň se osvědčily i různé návazné projekty v jiných předmětech či výtvarná díla související s kontextem dané úlohy.

Metodický list k úloze Ježci

3. a 4. ročník

Téma: dělení, dvoukroková slovní úloha

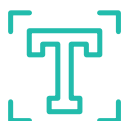
Záchranná stanice pro živočichy v Praze Jinonicích pomáhá přežít zimu mimo jiné i mláďatům ježka obecného. Letos na podzim přijala do své péče 27 ježčích mláďat. Ježci budou rozděleni po třech do krabic se senem a domkem na spaní. V každé krabici jsou potřeba také dvě misky, jedna na vodu a jedna na jídlo. Kolik misek pro ježky potřebuje záchranná stanice celkem?³

Text této dvoukrokové úlohy může působit obtíže. Úspěšnost úlohy u žáků 3. a 4. ročníku v našem výzkumu byla 39 %, přičemž vliv na obtížnost úlohy u mladších žáků měla i slova *Jinonicích*, *ježka* či *ježčích mláďat*.⁴ Doporučujeme, aby si žáci situaci z úlohy zakreslili. Uvědomí si, které údaje jsou k řešení potřeba a jaké vztahy jsou mezi základními objekty, o které jde: ježci, krabice, misky.



Motivační potenciál úlohy může učitel ještě zvýšit, pokud před předložením úlohy vede s žáky krátkou evokační diskusi (např. zda žáci již někdy viděli ježka, zda o něm něco vědí, co dělá ježek v zimě, co je záchranná stanice).

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Nakresli, jak vypadá ubytování pro 3 ježky.
2. Podtrhni v textu zeleně pasáže, které potřebuješ, a červeně pasáže, které **nepotřebuješ** znát k vyřešení úlohy.

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Odkud je text asi převzat?
 - a) z dětského komiksu
 - b) z učebnice přírodovědy
 - c) z pohádkové knížky
 - d) z učebnice matematiky

³ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 100). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologíj*. Karolinum.

⁴ Vondrová et al., 2019.

3. Rozhodni o každém tvrzení, zda zcela jednoznačně vyplývá ze zadání úlohy, či nikoli.

- a) Každý ježek potřebuje dvě vlastní misky, jednu na vodu, jednu na jídlo.
- b) Ježci byli rozděleni do třech krabic se senem a domkem na spaní.
- c) V Praze je jediná záchranná stanice pro živočichy, a to v Praze Jinonicích.

5. Vytvoř tři různé texty tak, jako by pocházely ze zdrojů, které jsi vyloučil/a v úloze 4.

6. Přeformuluj větu *Ježci budou rozděleni po třech do krabic se senem a domkem na spaní* tak, aby bylo jasné, kdo ježky rozdělí.

7. Existuje skutečně záchranná stanice Jinonice? Pokud ano, napiš její celou adresu.

Řešení

(1) Pro správný situační model úlohy je důležité, aby v ubytování byla přítomna trojice ježků a aby tam byly dvě misky. **(2)** *Záchranná stanice pro živočichy v Praze Jinonicích pomáhá přežít zimu mimo jiné i mláďatům ježka obecného. Letos na podzim přijala do své péče 27 ježčích mláďat. Ježci budou rozděleni po třech do krabic se senem a domkem na spaní. V každé krabici jsou potřeba také dvě misky, jedna na vodu a jedna na jídlo. Kolik misek pro ježky potřebuje záchranná stanice celkem?* **(3)** U všech tvrzení platí odpověď ne. Lze využít i k mezipředmětovým vztahům do přírodovědy a k následné diskusi o ježcích a ochraně přírody vůbec. **(4)** d) **(5)** Otevřená úloha – vede k rozlišení různých funkcí textu a přizpůsobení jazykových prostředků komunikačnímu záměru. **(6)** Např. *Záchranná stanice ježky rozdělí...*; transformační cvičení, propedeutika k různým možnostem vyjádření přísudku a konatele děje. **(7)** Záchranná stanice hl. m. Prahy pro volně žijící živočichy, Mezi Rolemi 158 00 Praha 5-Jinonice (<https://lhmp.cz/zachranna-stanice/>).



Žáci mají tendenci na otázku 3c odpovídat podle skutečnosti. Je třeba je vést k tomu, že musí uvažovat jen na základě textu úlohy.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe



K úloze existují dvě dvojice řešení, v každé je jedno řešení správně a druhé chybně. V první dvojici je správně Mínovo řešení. Kevin udělal chybu v tom, že počítal jen s jednou miskou v krabici. Mohlo se také jednat o klasickou chybu žáků ve dvoukrokové úloze, kdy provedou jen první krok a řešení ukončí.

Ve druhé dvojici je správně řešení Jeronýma. Kleopatra počítala, že každý ježek potřebuje dvě misky, a vynechala informaci o rozdělování ježků do krabic. Kleopatře by zřejmě pomohlo, kdyby byla vyzvána, aby si situaci nakreslila.

Návazná práce



Úloha je vzhledem ke svému tématu využitelná i jako vstupní úkol do dalších aktivit – např. žáci mají na dané téma vymyslet pohádkový příběh nebo vypracovat projekt o ježcích či o záchranné stanici, v hodině přírodopisu si mohou číst o ježcích. Při jedné pilotáži měli žáci sami vymýšlet, co by se ještě „ježkům hodilo“, a pak počítali, kolik by toho bylo potřeba. Je také možné úlohu spojit s návštěvou skutečné záchranné stanice v okolí školy.

Pracovní list 1 k úloze Ježci



Záchranná stanice pro živočichy v Praze Jinonicích pomáhá přežít zimu mimo jiné i mláďatům ježka obecného. Letos na podzim přijala do své péče 27 ježčích mláďat. Ježci budou rozděleni po třech do krabic se senem a domkem na spaní. V každé krabici jsou potřeba také dvě misky, jedna na vodu a jedna na jídlo. Kolik misek pro ježky potřebuje záchranná stanice celkem?

Nejdříve zjistím, kolik krabic je potřeba.

Do každé krabice patří miska na vodu a miska na jídlo.

Mám odpověď.

$$27 : 3 = 9 \text{ krabic}$$

$$9 \cdot 2 = 18 \text{ misek}$$

Záchranná stanice potřebuje celkem 18 misek.



MÍNA

$$27 : 3 = 9 \text{ krabic}$$

Celkem bude v krabicích 9 misek.

Potřebuji zjistit, do kolika krabic ježky rozdělit.

V každé krabici jsou misky, tedy mám odpověď.



KEVIN

Pracovní list 2 k úloze Ježci



Záchranná stanice pro živočichy v Praze Jinonicích pomáhá přežít zimu mimo jiné i mláďatům ježka obecného. Letos na podzim přijala do své péče 27 ježčích mláďat. Ježci budou rozděleni po třech do krabic se senem a domkem na spaní. V každé krabici jsou potřeba také dvě misky, jedna na vodu a jedna na jídlo. Kolik misek pro ježky potřebuje záchranná stanice celkem?

Nejdříve zjistím,
kolik krabic je
potřeba.

Do každé krabice
patří miska na vodu
a miska na jídlo.

Mám odpověď.

$$27 : 3 = 9 \text{ krabic}$$

$$9 \cdot 2 = 18$$

Záchranná stanice
potřebuje celkem
18 misek.



JERONÝM

$$27 \cdot 2 = 54$$

Celkem bude
potřeba
54 misek.

Každý ježek
potřebuje misku
na vodu a misku na
jídlo, tedy 2 misky.

Ježků je 27, tedy
budu násobit
27 krát 2.

Mám odpověď.



KLEOPATRA

Metodický list k úloze Lichožrouti

4. ročník

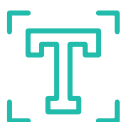
Téma: závislost, jednotka času

Čtyři ponožky sežere vyhládlý lichožrout za 28 minut. Za jak dlouho sežere jednu ponožku? Kolik času by potřeboval na tři ponožky?⁵

Úloha s atraktivním kontextem čerpá námět z oblíbené autorské pohádky Lichožrouti⁶, nabízí se tedy možnost zařadit evokační část, při níž si žáci přečtou část knihy nebo proběhne o této knize (či filmu) diskuse. Úloha je složenou slovní úlohou, ve které je zapotřebí provést dva výpočty v závislém pořadí (tedy $28 : 4 = 7$ a $7 \cdot 3 = 21$) a která vyžaduje dvě odpovědi. V zadání je zamlčen předpoklad, že lichožrout žere každou ponožku stejnou rychlostí – na tento fakt cílí první úkol zaměřený na porozumění textu úlohy. Se zamlčenými předpoklady se žáci ve výuce matematiky (zejména později u úloh na úměrnosti) setkávají opakovaně, a postupně si tak uvědomují, že je třeba při modelování situací z reálného života činit určité předpoklady.

Úlohu je možné mírně ztížit pro žáky 5. ročníku vynecháním první otázky. Žáci musí sami přijít na to, že mohou řešit výpočet přes „jednu ponožku“. Nabízená řešení fiktivních žáků mohou zůstat stejná.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Petr se při řešení úlohy přihlásil a tvrdil, že úlohu nemůže vyřešit, protože neví, jaké to jsou ponožky. Paní učitelka se divila a zeptala se, proč to potřebuje vědět. Petr odpověděl, že pokud je jedna ponožka velká a jiná malá, tak je může lichožrout žrát různě dlouho. Jednu velkou ponožku může žrát třeba 20 minut a zbylé tři malé ponožky pak jen 8 minut.

Rozvoj jazykové gramotnosti

3. Dokázal/a bys slovo vyhládlý nahradit jiným tak, aby zůstal zachován smysl věty (synonymem)?
4. Popiš svými slovy, jak asi vzniklo slovo lichožrouti. Co si pod tímto slovem představíš, jak mu rozumíš? Zkus vymyslet jiné slovo, které mohlo vzniknout stejně jako slovo *lichozrouti*.
5. Je slovo *sežrat* použito vhodně? Kdy ho použiješ, a kdy raději ne?

⁵ Viz disertační práce *Vliv atraktivity kontextu slovní úlohy na úspěšnost a řešení žáků* (Havlíčková, 2021, s. 49).

⁶ Šrut, P., & Mikolínová, G. (2008). *Lichožrouti*. Paseka

Pokus se úlohu přeformulovat tak, aby bylo jasné, že ponožky jsou stejné a že každou ponožku žere lichožrout stejně dlouhou dobu.

2. Někdo si nedovede situaci představit. Dokážeš nakreslit nějaký obrázek, který mu to vysvětlí?

6. Určitě víš, že slovní zásoba češtiny je zachycena ve slovnících. Jsou dostupné elektronicky a můžeš se do nich podívat, pokud ti není jasný význam nějakého slova. V 1. úkolu jsi přišel/přišla na to, že je důležité, že každou ponožku žere lichožrout stejně dlouhou dobu a stejně rychle. Takový postup se označuje slovem *rovnoměrně* a můžeš se na ně podívat třeba ve Slovníku spisovného jazyka českého. Přeformuluj úlohu znovu a použij při tom slovo *rovnoměrně*.

7. Převeď otázky v souvětí a napiš, zda lépe rozumíš původní, nebo nové variantě.

Řešení

(1) Při diskusi by mohla mezi žáky spontánně vzniknout otázka (ne)rovnoměrnosti žraní; žáci mohou např. navrhnout formulaci „Čtyři stejné ponožky sežere vyhládlý lichožrout za 28 minut. Za jak dlouho sežere jednu ponožku? Kolik času by potřeboval na tři stejné ponožky?“, „Čtyři ponožky velikosti 36 sežere vyhládlý lichožrout za 28 minut. Za jak dlouho sežere jednu ponožku velikosti 36? Kolik času by potřeboval na tři ponožky velikosti 36?“; vyjádření „rovnoměrnosti žraní“ může být pro žáky tohoto věku obtížné, možné formulace jsou např.: „Lichožrout se živí ponožkami. Ponožky žere rovnoměrně/stejně rychle.“, „Za jak dlouho sežere jednu ponožku, pokud je žere rovnoměrně rychle?“; diskuse by měla směřovat i k faktu, že rovnoměrnost žraní se v úloze předpokládá, což je věc v matematice obvyklá. (2) Někteří žáci budou kreslit, jak si představují lichožrouty (žáci si vytvářejí představu podle filmu *Lichožrouti*, je doporučeno vysvětlit význam žákům s odlišným mateřským jazykem, případně doložit ilustrací), jiní se pokusí obrázkem zachytit i matematický model úlohy. (3) *Vyhladovělý, mající hlad* (*hladový, nenajedený* – k diskusi o významu). (4) Slovo *lichý* plus *žrout* (propedeutika k učivu o obohacování slovní zásoby skládáním – kompozita). (5) Poučení o rozvrstvení slovní zásoby: v uměleckém textu (pohádka, povídka) slovo *sežrat* lze použít; jinak se používá spíše v souvislosti se zvířaty; v souvislosti s lidmi a v neuměleckém textu použijeme neutrální *snědl*; za pomoci učitele žák opět může hledat v elektronických zdrojích. (6) Úkol je hodně těžký: „Rovnoměrný – SSJČ (via Internetová jazyková příručka) = „zachováající stejnou, rovnou míru; stejnoměrný“; odtud odvozeno rovnoměrně – stejnou mírou.“⁷ Didaktický problém je, že výkladový slovník přiměřený žákovi mladšího školního věku čeština nemá. Vždy u těchto úloh tedy předpokládáme pomoc učitele. Nelze totiž resignovat na práci se slovníkovými zdroji: zkušenost ukázala, že i mladší žáci po zacvičení dokáží pracovat s nejjednoduššími funkcemi Českého národního korpusu, Internetové jazykové příručky s odkazy do výkladových slovníků apod. (7) Jsou to tři věty jednoduché: každá obsahuje jen jeden přísudek (učivo 4. ročníku, příp. propedeutika dle ŠVP); důležité učivo s komunikačním vyústěním schopnosti správné interpunkce; převod: *Za jak dlouho sežere jednu ponožku a kolik času by potřeboval na tři ponožky?*; subjektivní rozhodnutí žáka, dle našeho soudu varianta s větami jednoduchými je srozumitelnější.



V pilotáži žáci popisovali, že vždycky po praní zůstane jedna ponožka, proto je použito slovo *lichý*. Vymýšleli názvy podle toho, co se jim ještě ztrácí / co často nemohou najít: *klíčožrouti, perožrouti, mobiložrouti* apod.

⁷ <https://ssjc.ujc.cas.cz/search.php?hledej=Hledat&heslo=rovnom%C4%9Bn%C4%9B&sti=EMPTY&where=hesla&hsubstr=no>.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Obě předložená řešení jsou chybná. Marcel odčítal místo dělení, což je poměrně častá chyba, a podal odpověď nekonzistentní s přímou úměrností (na jednu ponožku by lichožrout potřeboval více času než na tři). Navíc špatně vyjádřil jednotku (minuta vs. čas). Petronela udělala formální chybu v zápisu (rovnost $28 : 4 = 7 \cdot 3 = 21$ neplatí) a chybí odpověď na jednu z otázek. Chyba zápisu je u žáků častá. Znaménko rovná se zde nechápe jako rovnost, ale spíše jako jakousi šipku v řetězení operací. Myšlenkově je však řešení správně.

Pracovní list k úloze Lichožrouti



Čtyři ponožky sežere vyhládlý lichožrout za 28 minut. Za jak dlouho sežere jednu ponožku? Kolik času by potřeboval na tři ponožky?



MARCEL

Jednu ponožku
sežere za
24 minut.

$$28 - 4 = 24$$

Na tři ponožky
potřebuje 25 času.

$$28 - 3 = 25$$



PETRONELA

Lichožrout sežere
tři ponožky za
21 minut.

$$28 : 4 = 7 \cdot 3 = 21$$

Metodický list k úloze Rezervace

5. ročník Téma: dvoukroková slovní úloha, násobení, dělení

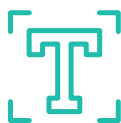
Rezervace na západním břehu Afriky se specializuje na ohrožené druhy opic. Ty jsou chovány na několika pozemcích, které jsou od sebe odděleny plotem. Na každém pozemku je 6 stromů a dále také nádrž s vodou a dřevěná stříška. Každý pozemek obývá 18 opic. Na všech pozemcích v celé rezervaci žije dohromady 540 opic. Kolik je v rezervaci dohromady stromů?⁸

Úlohu je nutné řešit dvěma kroky, a navíc má poměrně komplexní zadání; správně ji vyřešilo 47 % žáků 5. ročníku v našem výzkumu.⁹ Nejčtenější chyby, jichž se žáci dopustili, jsme zpracovali do některých nabídnutých řešení fiktivních žáků. Žákům by mohlo v řešení pomoci, pokud bychom je požádali, aby si situaci zakreslili. Tak si lépe uvědomí, o které objekty v úloze jde (pozemky, stromy, opice) a jaké jsou mezi nimi vztahy. Úloha obsahuje hodně nadbytečného textu, který však skýtá řadu možností, jak s ním pracovat z jazykového hlediska.



Kontext úlohy je pro žáky motivující. Před ukázáním zadání úlohy může učitel zařadit evokační fázi např. otázkami „co je to rezervace“, „jaká zvířata žijí v rezervacích“, „proč rezervace vznikají“, „kde vznikají“ apod.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Nakresli jeden pozemek tak, aby co nej přesněji odpovídal popisu v textu úlohy.



Rozvoj jazykové gramotnosti

4. V jakém významu je v textu úlohy použito slovo *rezervace*? Znáš ještě jiný význam tohoto slova? Použij ho ve větě v jiném významu. Můžeš si vzít na pomoc některý z výkladových slovníků češtiny.

⁸ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 108). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.

⁹ Vondrová et al., 2019.

2. Rozhodni o každém z tvrzení, zda jednoznačně vyplývá z textu.

- a) Ohrožené druhy opic jsou v Africe chovány pouze v rezervacích.
- b) V celé rezervaci na západním břehu Afriky žije 540 opic.
- c) Na každém pozemku v rezervaci je nádrž s vodou, stříška, šest stromů a osmnáct opic.

5. a) Ve druhém souvětí vyhledej přísudky.
b) Přeformuluj souvětí tak, aby vznikla věta. Význam musí zůstat zachován.

6. Ke slovu *dohromady* vytvoř a) synonymum, b) slovo významem protikladné (antonymum). Které z nich můžeš v textu použít, aniž by se změnil význam?

3. Vytvoř kratší variantu úlohy tak, aby se nezměnil její smysl.

7. Je z textu zřejmé, kdo v rezervaci vytvořil pozemky, oddělil je plotem a kdo na nich chová opice?

8. Najdi v textu slovo rodu ženského, které se skloňuje ve všech pádech jednotného i množného čísla podle vzoru *růže*.

Řešení

(1) Žáci by si měli uvědomit vztahy mezi pozemky, stromy a opicemi. (2) a) Ne, b) ano, c) ano. (3) Např.: V rezervaci jsou ohrožené druhy opic chovány na několika oplocených pozemcích. Na každém pozemku je 6 stromů a obývá ho 18 opic. V rezervaci žije celkem 540 opic. Kolik je tam stromů? (4) Chráněné území; rezervování/zamluvení/vyhrazení si objektu, termínu apod. – Mám ve vašem hotelu rezervaci; nutná podpora vyučujícího. (5) a) Jsou chovány, jsou odděleny; b) Ty jsou chovány na několika pozemcích vzájemně oddělených plotem; žák musí provést nominalizaci a odstranit jeden z přísudků. (6) a) Celkem, úhrnem (neznámé slovo – obohacování slovní zásoby), lze použít b) zvláště, nelze použít. Je možné diskutovat i o jiných synonymech (*společně, spolu, najednou*). (7) Ne, lze využít k výkladu či procvičování trpného rodu. (8) Pouze slovo *rezervace*, slovo *opice* má v 2. pádu množného čísla nulovou koncovku.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

V první dvojici jsou obě řešení nesprávná. Lucius nejdříve vypočetl, kolik opic je na jednom stromě, a pak dělil počet opic šesti (stejně to učinilo 11 % žáků 5. ročníku z našeho výzkumu¹⁰). Důvod není zřejmý, ale lze spekulovat, že se jedná o návodnost čísel 540 a 6 (540 je očividně dělitelné šesti). Tess se dopustila stejné chyby jako 5 % žáků v našem výzkumu. Provedla jen první krok (zjistila počet pozemků). Může se jednat o chybu typickou pro více krokové úlohy, kdy žák provede jen první krok a ukončí řešení.

Ve druhé dvojici je opět Lucius. Logan v prvním kroku nesprávně počítal, že na jednom pozemku je $6 \cdot 18 = 108$ opic, ale další kroky již provedl správně. U jednoho žáka v našich

¹⁰ Vondrová et al., 2019.

rozhovorech se ukázalo, že chápal zájmeno „ho“ tak, jako by se vztahovalo ke stromu, a ne k pozemku. To by mohlo být příčinou této chyby.

Na třetí dvojici řešení, Tess a Logana, je zajímavé to, že obě jsou nesprávná, ale obě vedou ke stejnému výsledku. Jedno řešení je Tessino a druhé Loganovo. Ve čtvrté dvojici řešení je řešení Logana a správné řešení Leony.

Pracovní list 1 k úloze Rezervace



Rezervace na západním břehu Afriky se specializuje na ohrožené druhy opic. Ty jsou chovány na několika pozemcích, které jsou od sebe odděleny plotem. Na každém pozemku je 6 stromů a dále také nádrž s vodou a dřevěná stříška. Každý pozemek obývá 18 opic. Na všech pozemcích v celé rezervaci žije dohromady 540 opic. Kolik je v rezervaci dohromady stromů?

Nejdříve zjistím,
kolik opic je na
každém stromě.

Nyní vydělím počet
opic šesti, abych
zjistil, kolik je tam
stromů.

Mám odpověď.

$$18 : 6 = 3$$

$$540 : 6 = 90$$

V rezervaci je
celkem 90 stromů.



LUCIUS

$$540 : 18 = 30$$

30 stromů

Celkem tam
je 30 stromů.

Strom obývá
18 opic. Počet opic
vydělím osmnácti
a mám to.

Již přesně vím,
kolik jich je.



TESS

Pracovní list 2 k úloze Rezervace



Rezervace na západním břehu Afriky se specializuje na ohrožené druhy opic. Ty jsou chovány na několika pozemcích, které jsou od sebe odděleny plotem. Na každém pozemku je 6 stromů a dále také nádrž s vodou a dřevěná stříška. Každý pozemek obývá 18 opic. Na všech pozemcích v celé rezervaci žije dohromady 540 opic. Kolik je v rezervaci dohromady stromů?

Nejdříve zjistím,
kolik opic je na
každém stromě.

Nyní vydělím
počet opic šesti,
abych zjistil, kolik
je tam stromů.

$$18 : 6 = 3$$

$$540 : 6 = 90$$

V rezervaci je
celkem 90 stromů.



LUCIUS

$$6 \cdot 18 = 108 \text{ opic}$$

$$540 : 108 = 5$$

$$5 \cdot 6 = 30$$

Celkem tam
je 30 stromů.

Kolik opic je na
jednom pozemku?

Ještě spočítám, kolik
mám pozemků.

Na jednom pozemku
je 6 stromů.



LOGAN

Pracovní list 3 k úloze Rezervace



Rezervace na západním břehu Afriky se specializuje na ohrožené druhy opic. Ty jsou chovány na několika pozemcích, které jsou od sebe odděleny plotem. Na každém pozemku je 6 stromů a dále také nádrž s vodou a dřevěná stříška. Každý pozemek obývá 18 opic. Na všech pozemcích v celé rezervaci žije dohromady 540 opic. Kolik je v rezervaci dohromady stromů?

*Strom obývá
18 opic.
Počet opic vydělím
18 a mám to.*

$$540 : 18 = 30$$

30 stromů

*Již přesně vím, kolik
jich je.*

Celkem tam
je 30 stromů.



TESS

$$6 \cdot 18 = 108 \text{ opic}$$

$$540 : 108 = 5$$

$$5 \cdot 6 = 30$$

Celkem tam
je 30 stromů.

*Kolik opic je na
jednom pozemku?*

*Ještě spočítám, kolik
mám pozemků.*

*Na jednom pozemku
je 6 stromů.*



LOGAN

Pracovní list 4 k úloze Rezervace



Rezervace na západním břehu Afriky se specializuje na ohrožené druhy opic. Ty jsou chovány na několika pozemcích, které jsou od sebe odděleny plotem. Na každém pozemku je 6 stromů a dále také nádrž s vodou a dřevěná stříška. Každý pozemek obývá 18 opic. Na všech pozemcích v celé rezervaci žije dohromady 540 opic. Kolik je v rezervaci dohromady stromů?

Kolik opic obývá jeden strom?

Ted' zjistím, kolik stromů potřebuji pro 540 opic.

$$18 : 6 = 3 \text{ opice}$$

$$540 : 3 = 180$$

V rezervaci je celkem 180 stromů.



LEON

$$6 \cdot 18 = 108 \text{ opic}$$

$$540 : 108 = 5$$

$$5 \cdot 6 = 30$$

Celkem tam je 30 stromů.

Kolik opic je na jednom pozemku?

Ještě spočítám, kolik mám pozemků.

Na jednom pozemku je 6 stromů.



LOGAN

Metodický list k úloze Herkules

6. ročník

Téma: desetinná čísla, zaokrouhlování

Herkules, velký silák a ochránce slabých, se ráno v letáku dočetl, že dnes v obchodě stojí krabice polotučného mléka 21,90 Kč. Není žádný troškař, a tak vyrazil rovnou pro dva kartony po 12 kusech, aby je zanesl do potravinové banky. Po cestě přepočítal peníze a zjistil, že má v peněžence 526 Kč. Budou mu peníze na nákup obou kartonů stačit? Svou odpověď zdůvodni.¹¹

Úloha má reálný a dobře představitelný kontext. Řešitelsky je poměrně jednoduchá, lze ji řešit pomocí násobení s následnou úvahou o zaokrouhlování na celé koruny při platbě. Reálný kontext však vede také k neformální strategii – v běžném životě bychom asi od počátku počítali se zaokrouhlenou hodnotou. Na to cílí jedno z nabízených řešení.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy	Rozvoj jazykové gramotnosti
1. Kde se používají ještě haléře?	4. Napadá tě, proč je hlavním hrdinou slovní úlohy člověk jménem Herkules?
2. Přeformuluj text tak, aby neobsahoval informace, které nepotřebuješ vědět k vyřešení úlohy.	5. <i>Herkules, velký silák a ochránce slabých, se ráno v letáku dočetl...</i> Jak se nazývá z hlediska skladby část <i>velký silák a ochránce slabých</i> ? Dokážeš první větu přeformulovat jinak?
3. Vysvětli svými slovy pravidla zaokrouhlování.	6. Úloha obsahuje zajímavé slovo <i>troškař</i> . Co to slovo znamená?
	7. Přepiš text úlohy tak, jako kdybys chtěl/a na sociálních sítích přesvědčit své přátele, aby se k tvému záměru připojili.

¹¹ Úlohu a řešení fiktivních žáků vytvořil Ondřej Kohout a upravil autorský tým Metodiky.

Řešení

(1) Haléře se od roku 2008 nepoužívají při hotovostních platbách, ale při bezhotovostních platbách ano. (2) *Krabice polotučného mléka stojí 21,90 Kč. Karton obsahuje 12 krabic. Stačí na nákup kartonu 526 Kč? Svou odpověď zdůvodni.* (3) Matematický výklad pravidel zaokrouhlování, ovšem je možné s žáky diskutovat, že v různých situacích může být zaokrouhlování podle jiných pravidel. (4) Silný muž – Staré řecké báje a pověsti, Eduard Petiška (rozhovor o četbě). (5) Jedná se o přístavek. Z komunikačního hlediska je pro žáka jeho znalost důležitá z toho důvodu, že se odděluje čárkou z obou stran. Reformulace: *Velký silák a ochránce slabých Herkules se ráno v letáku dočetl...* Komunikační výhoda – žák nemusí přemýšlet o interpunkci. (6) Troškař – slovníky spisovné češtiny toto slovo nezachycují. O to zajímavější je zamyslet se s žáky nad tím, jak je možné, že je nám význam zřejmý (někdo, kdo není skoupý, nehledí na korunu apod). Můžeme vycházet ze slovo-
tvorných principů – slovo-
tvorná utvářenost slova nám napovídá, že se jedná o konatelský název, podstatná je přípona -ař/-ář (lze uvádět příklady), jedná se o významnou univerbizační příponu (češtinář, zubař, výškař) – žáci mohou uvádět další příklady, typické pro náš případ je expresivní zabarvení (smolař, troška ...,¹²). Tento úkol pokládáme za velmi užitečný, neboť slovo-
tvorba je ve výuce češtiny spíše stranou. Zde je slovo použito přirozeně a lze poukázat na principy tvoření i jeho funkci. (7) Příklad: *Zdravím všechny, víte, že v krámkě vedle školy mají mléko za 21,90? Jde někdo se mnou nakoupit pro potravinovou banku?* – Následuje diskuse o stylistické platnosti jazykových prostředků a o rozdílu zvolených jazykových prostředků ve slovní úloze versus na sociálních sítích. Učitel může dále komunikační situace variovat.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe



Izolda správně vynásobila cenu za 1 krabici mléka počtem krabic v obou kartonech. Získaný součin 525,60 zaokrouhluje na celé číslo, na 526. Tristan nejprve zaokrouhlil cenu za 1 krabici mléka na celé koruny a zaokrouhlenou cenu vynásobil počtem krabic v obou kartonech. Dospěl k číslu 528 a učinil závěr, že peníze stačit nebudou.

Obě řešení může učitel využít k diskusi o zaokrouhlování vstupních čísel, které může sloužit pro rychlý odhad výsledku, ale také k velkým chybám. Může žáky požádat, aby zjišťovali velikost chyby při různých cenách mléka (např. 21,20 či 21,50) a při vstupním zaokrouhlování na celé koruny nahoru, či dolů.

¹² Dokulil, M., Horálek, K., Hůrková, J., Knappová, M., & Petr, J. (1986, s 263). *Mluvnice češtiny*. Academia.

Pracovní list k úloze Herkules



Herkules, velký silák a ochránce slabých, se ráno v letáku dočetl, že dnes v obchodě stojí krabice polotučného mléka 21,90 Kč. Není žádný troškař, a tak vyrazil rovnou pro dva kartony po 12 kusech, aby je zanesl do potravinové banky. Po cestě přepočítal peníze a zjistil, že má v peněžence 526 Kč. Budou mu peníze na nákup obou kartonů stačit? Svou odpověď zdůvodni.

Karton obsahuje 12 krabic, takže hledám cenu za 24 krabic.

Cenu za jednu krabici vynásobím 24.

Zaokrouhlím na celé koruny nahoru.



1 krabice 21,90 Kč
karton = 12 krabic
24 krabic ?

$$\begin{array}{r} 21,90 \\ \cdot 24 \\ \hline 8760 \\ 4380 \\ \hline 525,60 \end{array}$$

$$525,60 \approx 526$$

Nákup bude stát 526 Kč a peníze budou stačit.

IZOLDA

$$21,90 \approx 22$$

$$1 \text{ krabice} = 22 \text{ Kč}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \cdot 24 \\ \hline 88 \\ 44 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$528 > 526$$

$$(23 \cdot 22 = 506)$$

Nákup bude stát 528 Kč a peníze nebudou stačit.

TRISTAN

Částka 21,90 Kč se zaokrouhluje nahoru. Za každou krabici zaplatí Herkules přibližně 22 Kč.

Chce koupit 24 krabic, takže vynásobím číslem 24. Dostávám, že by musel zaplatit 528 Kč, a to je méně, než má.

Může koupit maximálně 23 krabic.



POR05: Metodický list k úloze Skupiny

6. ročník

Téma: násobek, nejmenší společný násobek

Učitel si na pondělní matematiku připravil čtyři aktivity do skupin. Všichni žáci se nejprve na první aktivitu rozdělili do skupin po 3, po jejím skončení na druhou aktivitu do skupin po 4, pak na třetí aktivitu do skupin po 6 a na konec hodiny se opět všichni rozdělili na čtvrtou aktivitu do skupin po 8. Kolik ze 30 žáků bylo přítomno na hodině, pokud se vždy podařilo skupiny utvořit tak, že byly kompletní a nikdo nepřebýval?¹³

Úloha má reálný a dobře představitelný kontext. Je zaměřena na pojem násobek a nejmenší společný násobek. Dá se řešit více způsoby, my nabízíme dva. Jeden je procesuální a pro žáky hodně názorný. Druhý je založen na uvědomění si, že se bude jednat o nejmenší společný násobek.



Úlohu s úspěchem vyřešili i žáci 5. ročníku.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Vysvětli, jak přesně byli žáci v průběhu hodiny rozdělení.
2. Je pro vyřešení úlohy důležité vědět, že třída měla 30 žáků?
3. Co to znamená, že *skupiny byly kompletní*?

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Řekni jinak *aktivity do skupin*, aniž bys změnil/a význam věty.
5. Které tvrzení lépe odpovídá první větě slovní úlohy?
 - a) Učitel si v pondělí na matematiku připravil čtyři aktivity do skupin.
 - b) Učitel si na matematiku v pondělí připravil čtyři aktivity do skupin.
6. Proč se v přísudku poslední věty píše -y? Má to vliv na řešení úlohy?

¹³ Úlohu a řešení fiktivních žáků vytvořil Ondřej Kohout a upravil autorský tým Metodiky.

Řešení

(1) Otevřená úloha. (2) Ano, hledá se číslo menší než třicet nebo rovno třiceti. (3) Všechny tříčlenné skupiny mají tři členy, čtyřčlenné čtyři členy... atd. (4) *Skupinové aktivity*; transformační cvičení, v 6. ročníku prozatím neterminologicky. (5) b) Významový rozdíl, v prvním případě se jedná příslovečné určení, ve druhém případě neshodný přívlastek: v 6. ročníku prozatím neterminologicky. (6) Z předcházející věty vyplývá, že šlo o skupiny: rod ženský; ano – *skupiny byli kompletní* není jazykově správně a formulace by mohla žáky zavést k hledání podmětu v rodu mužském životném.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Tristan začal správnou úvahou, že pokud jdou žáci rozdělit na skupinky po 6 nebo 8, určitě jdou rozdělit i na skupinky po 3 nebo po 4. Svou úvahu doplnil názorným obrázkem. Uvědomil si, že stačí prozkoumat násobky šesti a osmi, a tyto násobky si vypisoval tak dlouho, dokud nedostal stejné číslo (24) v obou sloupcích.



Heda si uvědomila, že se v úloze jedná o nejmenší společný násobek. Každé číslo si rozložila na součin prvočísel a z rozkladů následně vybírala a vyškrtávala prvočísla.



Návazná práce

Žáků se můžeme zeptat, jak by řešení vypadalo, kdybychom neměli dáno omezení v podobě počtu žáků ve třídě (další společný násobek je 48).



Podobné úlohy vyžadující pojem násobek a nejmenší společný násobek jsou běžně v učebnicích. Žáci je mohou řešit a navzájem si předkládat své způsoby řešení.

Pracovní list k úloze Skupiny



Učitel si na pondělní matematiku připravil čtyři aktivity do skupin. Všichni žáci se nejprve na první aktivitu rozdělili do skupin po 3, po jejím skončení na druhou aktivitu do skupin po 4, pak na třetí aktivitu do skupin po 6 a na konec hodiny se opět všichni rozdělili na čtvrtou aktivitu do skupin po 8. Kolik ze 30 žáků bylo přítomno na hodině, pokud se vždy podařilo skupiny utvořit tak, že byly kompletní a nikdo nepřebýval?

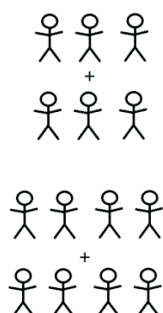
Když bylo možné rozdělit žáky do skupin po šesti, určitě to bylo možné i po třech.

Stejně je tomu pro 4 a 8.

Budu si vypisovat násobky šesti a osmi.

Vidím, že společné číslo v obou sloupcích je 24.

Mám výsledek.



6	8
12	16
18	24
24	32
30	...
...	

24 žáků

3

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$nsn = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$$

24 žáků

Pro čísla 3, 4, 6 a 8 budu hledat nejmenší společný násobek.

Rozložím si každé z nich na součin prvočísel.

Budu vybírat prvočísla.

Přitom vždy budu ta prvočísla, škrtat abych nějaké nezapočítala dvakrát.

Mám výsledek.



TRISTAN

Přítomno bylo 24 žáků.

HEDA



Metodický list k úloze Plachetnice

6. a 7. ročník

Téma: úměrnost, poměr

Firma Sea4you provozuje luxusní plachetnice pro výlety na moři poblíž Turecka, Chorvatska nebo v okolí řeckých ostrovů. Na každé plachetnici vypravené na moře se plaví 40 turistů, o které se musí pečlivě a zodpovědně starat 30 členů posádky, většinou složené z uklízečů, údržbářů, kuchařů, plavčíků a stevardů. Protože tento způsob trávení dovolené se stal v poslední době velmi oblíbeným, minulý týden se plavilo na lodích celkem 600 po zážitcích toužících turistů. Kolik členů posádek se o ně staralo?¹⁴

Z hlediska matematického úloha popisuje situaci přímé úměrnosti, ale lze ji zadat ještě před tím, než se žáci setkají s tematickým celkem Přímá a nepřímá úměrnost. Lze ji řešit úvahou. Úloha je žákům kontextově srozumitelná, s žákům ne zcela blízkým kontextem, který poskytuje mezipředmětové přesahy – plachetnice pro 40 lidí a k tomu 30 členů posádky. Lze hovořit o tom, zda je to vůbec reálné, kdo všechno pracuje na lodi, jaké služby turisté luxusní plachetnice očekávají apod. Úloha má dlouhé zadání s množstvím nadbytečných nečíselných informací. Zásadní je porozumění, kolika turistům odpovídá jaký počet členů posádky. Nepravá vedlejší věta přívlastková připouští dvojí možnost čtení – 30 členů posádky se stará o 40 turistů, nebo 30 členů posádky se stará o každého turistu. Toto porozumění asi nebude časté, ale pokud se u žáků objeví, lze otevřít diskusi o tom, jak tuto nejednoznačnost odstranit (např. *Na každé plachetnici ... turistů. O skupinu se stará ... posádky. Kolik bylo dohromady všech členů posádek?*).

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Rozhodni o každém tvrzení, zda zcela jednoznačně vyplývá z textu úlohy, či nikoli.

a) Na každého turistu na jedné plachetnici připadá 30 členů posádky.

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Popiš, jak si představuješ luxusní plachetnici.

5. Z první věty textu vytvoř souvětí. Posuď, zda lépe rozumíš původní větě, anebo novému souvětí.

¹⁴ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvátal, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 394–395). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.

- b) Na péči o 40 turistů na jedné lodi je třeba 30 členů posádky.
- c) Minulý týden se turisté plavili na celkem 15 luxusních plachetnicích.
- d) O zákazníky se stará celkem pět různých profesí.

6. Kolik vět může mít souvětí, které vytvoříš stejným způsobem z textu *Na každé plachetnici vypravené na moře se plaví 40 turistů, o které se musí pečlivě a zodpovědně starat 30 členů posádky, většinou složené z uklízečů, údržbářů, kuchařů, plavčíků a stevardů?* Zachovej smysl textu.

2. Vyškrtni v textu pasáže, které **nepotřebuješ** znát k vyřešení úlohy. Úlohu zkrát tak, abys nevynechal/a žádné informace, které jsou potřebné pro vyřešení úlohy.

7. Vytvoř co nejvíce příbuzných slov ke slovům *uklízeč, údržbář, kuchař, plavčík*. Kterými slovními druhy tato slova jsou?

3. Z úlohy se ztratilo následující souvětí.
Údržba plachetnic je však velmi náročná, proto každá plachetnice vyplula jen jednou. Doplň je na správné místo a pak úlohu vyřeš.

Řešení

(1) a) a b) Nepravá vedlejší věta přívlastková připouští dvojí možnost čtení – 30 členů posádky se stará o 40 turistů, nebo 30 členů posádky se stará o každého turistu. Toto chápání nebude časté. c) Ano, d) ne. (2) (Úkol lze formulovat i inverzně: vypišme pasáže, které budeme potřebovat k řešení úlohy.) Firma provozuje luxusní plachetnice pro výlety na moři poblíž Turecka, Chorvatska nebo v okolí řeckých ostrovů. Na každé plachetnici vypravené na moře se plaví 40 turistů, o které se musí pečlivě a zodpovědně starat 30 členů posádky, většinou složené z uklízečů, údržbářů, kuchařů, plavčíků a stevardů. Protože tento způsob trávení dovolené se stal v poslední době velmi oblíbeným, minulý týden se plavilo na lodích celkem 600 po zážitcích toužících turistů. Kolik členů posádek se o ně staralo? (3) *Protože tento způsob trávení dovolené se stal v poslední době velmi oblíbeným, minulý týden se plavilo na lodích celkem 600 po zážitcích toužících turistů. Údržba plachetnic je však velmi náročná, proto každá plachetnice vyplula jen jednou. Kolik členů posádek se o ně staralo?* (4) Otevřená úloha – stylizační cvičení, popis. (5) Např. *Firma provozuje luxusní plachetnice, které slouží k výletům na moři poblíž Turecka, Chorvatska nebo v okolí řeckých ostrovů*. (6) Žáci mohou nabídnout různá řešení. Tato úloha však především nabízí výborný materiál k transformačním cvičením vedoucím k objasnění stylistického charakteru a funkce kondenzovaných a nekondenzovaných vyjádření (např. *Na každé plachetnici, kterou firma vypraví na moře, se plaví 40 turistů, o které se musí pečlivě a zodpovědně starat 30 členů posádky, která se většinou skládá z uklízečů, údržbářů, kuchařů, plavčíků a stevardů*). Sekundárně mohou žáci odhalit stylisticky nevhodné opakování zájmena *který* a v textu (nikoliv v paradigmatu) se seznámit se stylistickým využitím zájmena *jenž*, případně s jinými stylizačními řešeními (... *starat 30 členů posádky. Posádka/Ta se většinou skládá z uklízečů, údržbářů, kuchařů, plavčíků a stevardů*). (7) Dle slovní zásoby žáka. Jedno z možných řešení podle Metodické příručky k učebnici českého jazyka pro 7. ročník ZŠ: „Plavat: podstatná jména – plavba, rychloplavba, plavání, plavec, plavkyně, plavčík, plavčice, plavky, plavidlo, záplava, náplava, splav, splavnost, plovárna, plovák, Plaváček, znakoplavka; přídavná jména – plavební, plavecký, plavoucí (plovoucí), splavný, splavitelný; slovesa – uplavat, přeplavat, proplavat, naplavat, vyplavat, zaplavat, doplavat, podplavat, přiřlavat, odplavat, nadplavat.“¹⁵

¹⁵ Hošnová, E., Bozděchová, I., Mareš, P., & Svobodová, I. (2007, s. 24). *Český jazyk pro 6: pro základní školy: metodická příručka*. SPN. (<https://www.skolnibrasnicka.cz/img/cms/2022/%C4%8CJ%206%20MP.pdf>)



Individuální řešení úlohy

Pokud i po společném rozboru textu úlohy nebudou někteří žáci vědět, jak začít, můžeme je požádat, aby zjistili, o kolik se budou lišit počty turistů a členů posádky na dvou plachetnicích.



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Úloha vyžaduje pochopení principu přímé úměrnosti a poměru, ale dá se řešit bez znalosti formálních postupů. Noe vyřešil úlohu správně úvahou „kolikrát více turistů se plavilo minulý týden, tolikrát více bude třeba členů posádky“. Medard chybně předpokládal, že je mezi veličinami jakýsi lineární vztah (mezi počtem turistů a členů posádky je určitý rozdíl, který se mění „o řád“). Číslo nedal do poměru, pouze je odečetl. Tato chyba je u žáků poměrně častá (objevila se u více než 7 % žáků 6. ročníku v našem výzkumu¹⁶).

¹⁶ Vondrová et al., 2019.

Pracovní list k úloze Plachetnice



Firma Sea4you provozuje luxusní plachetnice pro výlety na moři poblíž Turecka, Chorvatska nebo v okolí řeckých ostrovů. Na každé plachetnici vypravené na moře se plaví 40 turistů, o které se musí pečlivě a zodpovědně starat 30 členů posádky, většinou složené z uklízečů, údržbářů, kuchařů, plavčíků a stevardů. Protože tento způsob trávení dovolené se stal v poslední době velmi oblíbeným, minulý týden se plavilo na lodích celkem 600 po zážitcích toužících turistů. Kolik členů posádek se o ně staralo?

Noe a Medard začali stejným zápisem.

Počet turistů na plachetnici..... 40
 Počet členů posádky na plachetnici 40
 Počet turistů celkem 600
 Počet členů posádky celkem x

NOE

MEDARD

Nejdříve vypočítám, kolik plachetnic se minulý týden plavilo.

Na každé plachetnici se plaví 30 členů posádky. Tedy na patnácti plachetnicích se jich bude plavit 15krát víc.

Vynásobím číslo 30 číslem 15. Vyšlo 450.

Počet plachetnic..... P

$$P = 600 : 40 = 15$$

$$x = 30 \cdot P = 30 \cdot 15$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ \cdot 15 \\ \hline 150 \\ 30 \\ \hline 450 \end{array}$$

$$x = 450$$

$$40 - 30 = 10$$

$$600 - 100 = 500$$

$$x = 500$$

Na plachetnici se liší počet turistů a členů posádky o 10.

Když je turistů 600, bude tento rozdíl 10krát větší, tedy odečtu 100.

Vyšlo mi 500.



Staralo se o ně 450 členů posádky.



Staralo se o ně 500 členů posádky.

Metodický list k úloze Šimáčkovi

6. a 7. ročník

Téma: desetinná čísla, násobení, dělení, slovní úloha s antisignálem

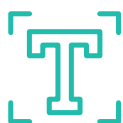
Rodina Šimáčkových využila prodloužený víkend k turistice. V neděli podnikli výlet o celkové délce 19,5 km. Nedělní výlet byl 1,5krát kratší než sobotní. Kolik kilometrů ušli během sobotního výletu?¹⁷

Úloha má dobře představitelný, žákům blízký kontext. Obsahuje multiplikativní operátor (1,5krát), kde slovo *kratší* je v roli antisignálu. Navozuje totiž představu dělení, ale správné řešení je založeno na operaci násobení. Žák, který používá strategii klíčových slov, bude při řešení úlohy neúspěšný. V takovém případě se lze zeptat, jak by se úloha řešila, kdyby v úloze bylo *dvakrát kratší*. Je možné, že pak by si ti žáci, kteří se kvůli použití desetinného čísla, jež vidí jako komplikované, uchýlili k používání zcela formální strategie klíčových slov, byli schopni vytvořit správný situační model. Lze dále doporučit, aby si žáci situaci zaznamenali graficky (např. úsečkovým diagramem). V našem výzkumu vyřešilo tuto úlohu úspěšně jen 33 % žáků 6. ročníku.¹⁸



Někteří žáci vyřeší úlohu správně, i když použijí strategii klíčových slov – slovo *krát* (které nespojují s následujícím slovem *kratší*) jim totiž evokuje násobení. V takovém případě by bylo vhodné se zeptat, jak by se úloha řešila, pokud by bylo zadáno *Nedělní výlet byl 1,5krát delší než sobotní*.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Přečti si slovní úlohu, ale neřeš ji. Pokus se pouze odpovědět na otázku: Byl sobotní výlet kratší, nebo delší než nedělní?

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Co znamená slovní spojení *prodloužený víkend*?

¹⁷ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 275). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.

¹⁸ Vondrová et al., 2019.

2. Které z následujících tvrzení vyplývá z textu?

- a) Sobotní výlet byl kratší než nedělní.
- b) Sobotní výlet byl delší než nedělní.
- c) Sobotní výlet byl 1,5krát kratší než nedělní.

5.

- a) Vysvětli, proč se v koncovce slovesa *podnikli* píše měkké *i*.
- b) Přeformuluj větu tak, aby se v koncovce psalo *y* tvrdé.

6. Na základě odpovědi v bodě 5 uvažuj, zda bys nedokázal/a druhou větu stylizovat vhodněji.

3. Přečti si následující slovní úlohu: *Rodina Šimáčkových využila prodloužený víkend k turistice. V neděli podnikli výlet o celkové délce 19,5 km. Sobotní výlet byl 1,5krát delší než nedělní. Kolik kilometrů ušli během sobotního výletu?*

- a) Vyřeš tuto úlohu.
- b) Je její řešení stejné jako u úlohy původní?
- c) V čem je úloha rozdílná? Popiš, k jaké změně v úloze došlo.

7.

- a) Zamysli se nad slovem *během* v poslední větě a uveď synonymum.
- b) Porovnej následující věty: *Kolik kilometrů Šimáčkovi ušli během sobotního výletu? Kolik kilometrů zvládli Šimáčkovi rychlým během?* Když ti prozradím, že v prvním případě je *během* předložka, zatímco v druhém případě je *během* podstatné jméno, dokážeš přijít na důkaz, kterým mé tvrzení podpoříš?

Řešení

(1) Sobotní výlet byl delší než nedělní. Otázka je zaměřena na to, aby se žáci zamysleli nad významem slovní úlohy, aniž by ji řešili. Otázka zaměřuje jejich pozornost na zásadní informaci. **(2) b) (3)** Žák si má uvědomit, že je tu jinými slovy řečeno to samé, a že tedy nemůže spoléhat na signální slova, ale musí si úlohu pozorně přečíst, třeba si ji zapsat a porozumět jí (nutno podpořit diskusí s učitelem). **(4)** Volný den (jeden či více) připojený k víkend (žáci mohou uvádět různé příklady: např. ředitelské volno v pátek, pololetní prázdniny atd.). **(5+6)** Jedná se o nevyjádřený podmět. Podle definice: „Mluvnickou povahu nevyjádřeného podmětu poznáme podle předcházejícího slovního kontextu nebo podle situace promluvy. ... V případech, ve kterých to jednoznačné není, je vhodné zvolit shodu podle rodu muž. živ.“¹⁹ Žáci se o stylistických důvodech lexikálního nevyjadřování podmětu a o pravidlu shody přísudku s nevyjádřeným podmětem dozvídají již od 5. ročníku ZŠ. Měli by tedy jednak uplatnit znalost o „přednosti“ rodu mužského životného, ale jednak i kriticky – po diskusí s učitelem – vyhodnotit stylisticky neobratnou stavbu úvodní části slovní úlohy (lépe: *Šimáčkovi využili prodloužený víkend k turistice. V neděli podnikli...*). **(5b)** Např. *Maminka s Janou podnikly...* **(7) a)** V průběhu. **b)** Problémová úloha: po žácích nepožadujeme znalost slovních druhů, ale aplikaci znalosti toho, že čeština má slovní druhy ohebné (kam patří podstatná jména) a neohebné (kam patří předložky; rovněž již učivo 5. ročníku). Zatímco v prvním případě slovo ani při přestylizování věty nezmění tvar (jako propedeutika výuky větných členů slouží také fixace spojení *během výletu* – předložka není větným členem, podstatné jméno ano), v druhém jej změní, např.: *Kolik kilometrů zvládli Šimáčkovi při rychlém běhu?*



Individuální řešení úlohy

¹⁹ Internetová jazyková příručka (<https://prirucka.ujc.cas.cz/?id=602>).



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

K úloze jsou připraveny dvě dvojice řešení. První dvojice kombinuje správné a nesprávné řešení. Žáci si jejím prostřednictvím uvědomují, že na správnou operaci nelze usoudit jen na základě signálu (jako to učinila Elza), ale že je nutné si vytvořit situační model (dobrou představu o situaci) jako Olaf.

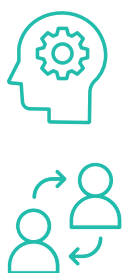


Je možné žáky požádat, aby vytvořili takové úlohy, které by Elza mohla řešit, aby si uvědomila svou chybu. I když žáci správně identifikují příčinu chyby, mnohdy nejsou schopni takovou úlohu vytvořit. Je to pro ně obtížné, ale rozhodně užitečné cvičení.

U druhé dvojice řešení se žáci učí interpretovat termín *1,5krát delší* dvěma způsoby. Julius rozdělil násobení číslem 1,5 na sčítání celku a jeho poloviny, čímž prokázal dobré porozumění násobení. Cézar použil standardní algoritmus pro násobení. Otázka u druhé dvojice řešení má žáky navést na to, aby si uvědomili podstatu Juliova postupu. Julius by si mohl napsat $S = 2N - 1/4N$.



Pro žáky může být problém pochopit řešení Julia. Např. žákyně 8. ročníku napsala: „Juliusovu způsobu počítání nerozumím. 1,5krát delší znamená 1,5krát delší, ne o polovinu delší. Nevím, jak se mohl dobrat ke správnému výsledku.“ Doporučujeme v takovém případě zařadit diskusi o jazykových otázkách (o polovinu, o třetinu, dvakrát, vícekrát, jednou tolik, dvakrát tolik apod.). Řešení pomocí násobení číslem 1,5 je přímočařejší a obecnější. Jazykové otázky jsou však také zajímavé a pro žáky je přínosné, když si uvědomí podstatu násobení číslem 1,5.



Návazná práce

Žáci mohou řešit další úlohy, v nichž je slovo (slova) v roli antisignálu (poukazuje na opačnou operaci) či naopak signálu (poukazuje na správnou operaci). Některé úlohy s antisignálem²⁰ uvádíme. U úloh řazených na začátku seznamu si stačí vytvořit dobrý situační model a provést jeden výpočet. Je také možné žáky požádat, aby úlohy neřešili, ale aby jen tvořili varianty tak, aby antisignál „zmizel“. Další možností je požádat žáky, aby sami tvořili úlohy, v nichž nějaké slovo či slova navádějí k jiné než správné operaci.

Kovové kružítko je o 15 korun dražší než mikrotužka, pravítko je o 14 korun levnější než mikrotužka. O kolik korun je kružítko dražší než pravítko? [o 29 Kč]

²⁰ Vondrová et al., 2019.

V tomto týdnu Otesánek rychle přibyl na váze. Ve středu vážil o 7 kilogramů více než v pondělí, ale o 4 kilogramy méně než v neděli. Kolik kilogramů Otesánek během tohoto týdne přibral? [11 kg]

Markéta připravuje dárky pro svoje kamarádky. Rozhodla se, že jim připraví sady korálků pro výrobu náramků. K přípravě sad potřebuje 8krát více modrých než bílých korálků. Modrých korálků má 56. Kolik musí koupit bílých korálků? [7 bílých korálků]

Kovové kružítko je šestkrát dražší než mikrotužka, pravítko je třikrát levnější než mikrotužka. Kolikrát je kružítko dražší než pravítko? [18krát]

Paní Dvořáková ve svém krámku prodává sady k výrobě náramků. K přípravě těchto sad potřebuje 15krát více modrých než bílých korálků. Modré korálky se prodávají v balíčcích po 200 kusech. Paní Dvořákové zbývá na skladě ještě 6 takových balíčků s modrými korálky, ale již nemá žádné bílé. Bílé korálky se prodávají v balíčcích po 20 kusech. Kolik potřebuje koupit balíčků bílých korálků? [4 balíčky]

Firma vyrábějící osobní automobily je převáží k odběrateli pomocí nákladních automobilů. Za 1. čtvrtletí letošního roku převezla 517 osobních automobilů. Převezených osobních aut bylo 11krát více, než bylo nákladních automobilů využitých pro převoz. Společnost nákladní automobily nevlastní, ale pronajímá si je. Pronájem jednoho nákladního automobilu včetně řidiče a nafty vychází na 40 000 Kč. Kolik společnost utratila za 1. čtvrtletí za dopravu osobních automobilů? [1 880 000 Kč]

Pracovní list 1 úloze Šimáčkovi



Rodina Šimáčkových využila prodloužený víkend k turistice. V neděli podnikli výlet o celkové délce 19,5 km. Nedělní výlet byl 1,5krát kratší než sobotní. Kolik kilometrů ušli během sobotního výletu?

ELZA



Když vidím v úloze spojení „*nkrát kratší*“, budu prostě dělit číslem n .

V tomhle případě je $n = 1,5$.

nedělní výlet $N = 19,5$ km
sobotní výlet $S = ?$ km

Délku sobotního výletu zjistím tak, že vydělím 19,5 číslem 1,5.

To je stejné jako dělit číslo 195 číslem 15.

Dostávám, že sobotní výlet má délku 13 km.

$$S = N : 1,5 = 19,5 : 1,5$$

$$\begin{array}{r} 195 : 15 = 13 \\ 145 \\ 0 \end{array}$$

$$S = 13 \text{ km}$$



Šimáčkovi ušli během sobotního výletu 13 km.

OLAF



Vím, že nedělní výlet byl kratší než sobotní. To ale znamená, že sobotní výlet musel být delší než nedělní.

Tedy budu násobit.

nedělní výlet $N = 19,5$ km
sobotní výlet $S = ?$ km
Sobotní výlet byl 1,5krát delší než nedělní výlet.

Když je něco *nkrát delší* nebo větší, tak prostě násobím *nkrát*.

Zde stačí jen vynásobit délku nedělního výletu číslem 1,5.

$$S = 1,5 \cdot N$$

$$\begin{array}{r} 19,5 \\ \cdot 1,5 \\ \hline 975 \\ 195 \\ \hline 29,25 \end{array}$$

$$S = 29,25 \text{ km}$$



Šimáčkovi ušli během sobotního výletu 29,25 km.

Pracovní list 2 k úloze Šimáčkovi



Rodina Šimáčkových využila prodloužený víkend k turistice. V neděli podnikli výlet o celkové délce 19,5 km. Nedělní výlet byl 1,5krát kratší než sobotní. Kolik kilometrů ušli během sobotního výletu?

Na začátku si oba žáci správně uvědomili, že sobotní výlet musel být 1,5krát delší než nedělní. Začali tedy stejným zápisem úlohy.

nedělní výlet $N = 19,5$ km
sobotní výlet $S = ?$ km
Sobotní výlet byl 1,5krát delší než nedělní výlet.

JULIUS

$$S = N + N : 2$$

$$\begin{array}{r} 19,5 : 2 = 9,75 \\ 15 \\ 10 \end{array}$$

$$S = 19,5 + 9,75 = 29,25$$

1,5krát delší vlastně znamená o polovinu delší.

Vypočtu si tedy polovinu z 19,5.

Nyní jen přičtu výsledek k délce nedělního výletu.



CÉZAR

$$S = 1,5 \cdot N$$

$$\begin{array}{r} 19,5 \\ \cdot 1,5 \\ \hline 975 \\ 195 \\ \hline 29,25 \end{array}$$

$$S = 29,25$$

Když je něco několikrát delší, tak několikrát násobím.

Vůbec mi nemusí vadit, že je číslo, kterým násobím, desetinné.

Délku nedělního výletu vynásobím číslem 1,5. Budu násobit pod sebou.



Rodina Šimáčkových ušla během sobotního výletu 29,25 km.

Jak by podle tebe řešil Julius úlohu, kdyby byl sobotní výlet 1,75krát delší než nedělní výlet? A jak Cézar?

Metodický list k úloze Rekonstrukce

6. a 7. ročník

Téma: obsah obdélníku

Při rekonstrukci bytu se manželé shodli, že by bylo hezké na jednu stěnu koupelny dát bílou omyvatelnou samolepicí tapetu. Rozměry stěny jsou 1 m a 2,6 m. Na internetu objednali tapetu o délce 2,6 m. Druhý den zjistili, že tapeta je široká pouze 40 cm. Kolik minimálně metrů stejné tapety bude potřeba doobjednat, aby byla tapetou pokryta celá stěna? Tapetu je možné stříhat.²¹

Úloha má reálný a dobře představitelný kontext. Vyžaduje znalost výpočtu obsahu obdélníku a dá se řešit úvahou (pomocí nákresu) i výpočtem. V jednom z nabízených řešení si žáci upevní souvislost mezi zlomky a desetinnými čísly.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Přeformuluj text tak, aby neobsahoval informace, které **nepotřebuješ** vědět k vyřešení úlohy.
2. Rozhodni o každém z následujících tvrzení, zda jednoznačně vyplývá z textu:
 - a) Délka zakoupené tapety odpovídá délce stěny v koupelně.
 - b) Délka zakoupené tapety neodpovídá délce stěny v koupelně.
 - c) Šířka zakoupené tapety odpovídá šířce stěny v koupelně.
 - d) Šířka zakoupené tapety neodpovídá délce stěny v koupelně.
 - e) Šířka zakoupené tapety byla přesně 6,5krát užší, než je šířka koupelny.

3. Platí následující tvrzení? *Když tapetu rozbílili, zjistili, že je široká pouze 40 cm.*

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Vysvětli psaní *i/y* v přísudcích, které se vyskytují v textu.
5. Urči základní skladební dvojice v prvním souvětí. Který z podmětů lze snadno převést na vedlejší větu? Přeformuluj souvětí a tuto vedlejší větu použij. Hlasujte ve třídě, které vyjádření pokládáte za vhodnější.
6. Ve slově *samolepicí* se píše po *p* krátké *i*. Připrav si krátký výklad o tom, kdy je třeba v přídavných jménech tohoto typu psát *-icí*, a kdy *-ící*. Má tato znalost vliv na řešení slovních úloh?

²¹ Úlohu a řešení fiktivních žáků vytvořil Ondřej Kohout.

Řešení

(1) Na stěnu o rozměrech stěny 1 m x 2,6 m byla zakoupena tapeta o délce 2,6 m a šířce pouze 40 cm. Kolik minimálně metrů stejné tapety bude potřeba doobjednat, aby byla tapetou pokryta celá stěna? Tapetu je možné stříhat. (2) a) Ano, b) ne, c) ne, d) ano, e) ne. (3) Ne, v textu nikde není řečeno, že tapeta byla skutečně doručena, manželé to mohli zjistit například pečlivějším přečtením internetové objednávky. (4) Shodli, objednali, zjistili (m. ž.). (5) Při rekonstrukci bytu se manželé shodli, že by bylo hezké na jednu stěnu koupelny dát bílou samolepicí tapetu. Při rekonstrukci bytu se manželé shodli, že by bylo hezké, kdyby na jednu stěnu koupelny dali bílou samolepicí tapetu. Nevětné vyjádření je ekonomičtější, úzce se dotýká procesu nominalizace²² – slohové výústění. (6) Výklad např. dle *Internetové jazykové příručky*,²³ tato znalost může mít vliv na řešení slovních úloh; při tvorbě slovních úloh je dobře umět rozlišovat dějová a stavová adjektiva z hlediska jazykové správnosti: např. *kropící vůz* (ošetřuje určitou část vozovky o délce...) nebo *kropící vůz* (má funkční kropicí nádrž o objemu...). Záleží, zda chceme vyjádřit děj, nebo stav, podle toho pak stylizujeme slovní úlohu.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe



Aida řešila úlohu s pomocí názorného obrázku. Rozdělila stěnu tak, jak se na ni bude tapeta lepit – tedy 1 m rozdělila na 40 cm, 40 cm a 20 cm. Část, která zbývá k pokrytí tapetou, si vybarvila. Z obrázku je patrné, že bude potřeba jedna tapeta o délce 2,6 m a ještě zbude obdélník o šířce 20 cm. Aida si uvědomila, že je možné tapetu rozstříhnout napůl, a rozdělila obdélník o šířce 20 cm na dvě stejné části o délce 1,3 m.

Cézar řešil úlohu početně. Zjistil obsah obdélníku stěny a určil obsah té části, která není pokrytá tapetou. Zjištěný obsah vydělil číslem 0,4, které odpovídá šířce tapety v metrech, a získal správný výsledek. Výpočet $1,56 : 0,4$ je založen na dobrém porozumění vyplňování plochy. Cézar svým postupem transformoval obdélník s rozměry 60 cm x 2,6 m na obdélník s rozměry 40 cm x 3,9 m. Za zmínku ještě stojí výpočet součinu pomocí převodu desetinných čísel na zlomky.

²² Karlík, P. (2017). Nominalizace. In P. Karlík, M. Nekula, & J. Pleskalová (Eds.), *CzechEncy – Nový encyklopedický slovník češtiny*. (<https://www.czechency.org/slovník/NOMINALIZACE>)

²³ <https://prirucka.ujc.cas.cz/?slovo=samolepic%C3%AD#bref2>

Pracovní list k úloze Rekonstrukce



Při rekonstrukci bytu se manželé shodli, že by bylo hezké na jednu stěnu koupelny dát bílou omyvatelnou samolepicí tapetu. Rozměry stěny jsou 1 m a 2,6 m. Na internetu objednali tapetu o délce 2,6 m. Druhý den zjistili, že tapeta je široká pouze 40 cm. Kolik minimálně metrů stejné tapety bude potřeba doobjednat, aby byla tapetou pokryta celá stěna? Tapetu je možné stříhat.

AIDA

CÉZAR

Nakreslím si obrázek stěny.

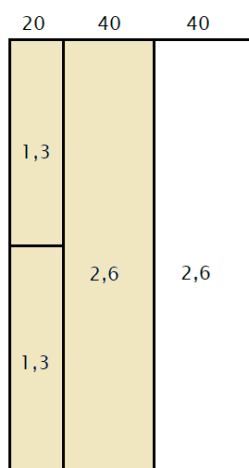
Svisle ji rozdělím, jak se na ni bude lepit tapeta.

Vybarvím část, na niž tapeta nezbyla.

Určitě bude potřeba 2,6 m a ještě zbyde obdélník široký 20 cm.

Tapetu bude nutné rozstříhnout napůl.

Stačit bude 1,3 m. Oba rozměry sečtu.



$$2,6 + 1,3 = 3,9 \text{ (m)}$$

$$1 \cdot 2,6 = 2,6 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$$

$$0,4 \cdot 2,6 = \frac{4}{10} \cdot \frac{26}{10} = \frac{104}{100} = 1,04 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$2,6 - 1,04 = 1,56 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$1,56 : 0,4 = 156 : 40$$

$$156 : 40 = 3,9 \text{ (m)}$$

$$360$$

$$0$$

Vypočítám obsah celé stěny.

Ted' vypočítám obsah, který zabere již objednaná tapeta.

Určím, kolik m² zbývá.

Vypočítám potřebnou délku tapety. 1,56 vydělím číslem 0,4.

Mám výsledek.



Bude potřeba dokoupit minimálně 3,9 metru tapety.



Metodický list k úloze Obraz

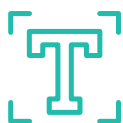
7. a 8. ročník

Téma: procenta

Pan Bohatý vydražil v aukční galerii obraz za 10 000 Kč. Kromě této částky byl ještě nucen zaplatit galerii provizi 20 % z ceny obrazu. Vše zaplatil, a jakmile dostal obraz do rukou, vrátil ho zpět do aukce ve stejné galerii, protože věřil, že obraz koupil lacino. Kolik minimálně by musel nový kupec i s 20% provizí za obraz zaplatit, aby pan Bohatý neprodělal?²⁴

Úloha je poměrně komplexní a vyžaduje dobré porozumění procentnímu základu. Žáci si musí uvědomit, z jaké částky je nutno 20 % počítat. Kontext úlohy může být pro žáky neobvyklý, doporučujeme věnovat dost času porozumění termínům, které se v ní nacházejí. Na druhou stranu může mít reálný kontext úlohy dopad na motivaci žáků.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. a) Vysvětlí svými slovy následující pojmy: *dražba, aukce, galerie, provize*
b) Jak probíhá aukce?

2. V jakém významu je v textu použito slovo *(ne)prodělal*? V jakém jiném významu bývá toto slovo používáno?

3. Proč pan Bohatý vrátil obraz zpět do aukce?

4. Převyprávěj formou vyprávění děj slovní úlohy. Můžeš změnit i místo děje.

Rozvoj jazykové gramotnosti

5. Jaké jiné příjmení by se k panu Bohatému také hodilo?

6. Přeformuluj poslední větu tak, abys slovo *prodělat* nahradil/a slovem významem protikladným (antonymem).

7. Nahraď slovo *lacino* synonymem.

8. Přečti správně 20 % a 20%. Jaký je mezi nimi rozdíl?

Řešení

- (1) a) *Dražba, aukce*: Způsob prodeje, kdy se zboží prodá nejvyšší nabídce; *galerie*: prostor pro vystavování uměleckých děl; *provize*: odměna za vyřízení obchodu; b) otevřená odpověď, možno pracovat se slovníky.
(2) *Prodělat peníze* – přijít o peníze, ztratit peníze; *prodělat nemoc* – projít nemocí; mít nemoc. (3) Chtěl na

²⁴ Úlohu a řešení fiktivních žáků vytvořil Ondřej Kohout a upravil autorský tým Metodiky.

obrazu vydělat více peněz. **(4)** Např. *Pan Bohatý si ve starožitnictví koupil obraz za 10 000 Kč. K tomu ještě zaplatil poplatek, který činil 20 % z této ceny. Pak ale zjistil, že obraz koupil hodně lacino a že na něm může vydělat, pokud ho znovu prodá. Proto ho do starožitnictví vrátil. Ted' doufá, že se objeví nový kupec. Kolik minimálně musí nový kupec zaplatit, aby pan Bohatý neprodělal?* **(5)** Např. *Skrblík, Pracháč, Chamtivec...* **(6)** Věta se slovem vydělat. **(7)** Např. *levně.* **(8)** 20 % (s mezerou) = dvacet procent, 20% (bez mezery) = dvacetiprocentní (pravopisu procent doporučujeme věnovat zvýšenou pozornost, neboť se v něm často chybuje, přitom různé psaní zásadně mění význam).



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Nabízíme dvě dvojice řešení.



První dvě jsou obě správná. Xavier vyřešil úlohu pomocí úsečkového modelu, který mu poskytl hluboký vhled do situace. Využil svého dobrého porozumění procentům a jejich souvislosti se zlomky. Marilyn úlohu vyřešila pomocí výpočtu 1%.

Obě řešení ve druhé dvojici začínají správnou strategií výpočtu, kolik pan Bohatý za obraz zaplatil. Marilyn za nový základ vzala 12 000 Kč, tedy to, co by pan Bohatý měl od galeristy dostat, aby neprodělal. Medard se dopustil časté chyby, když za základ vzal to, co nový kupec zaplatí celkem. Tedy 20 % provize by se nepočítalo z ceny, za kterou se obraz prodal, ale z celkové ceny. Žáci by chybu mohli objevit i tak, že si udělají zkoušku. Aby pan Bohatý dostal zpět i provizi, musí nový zákazník zaplatit $12\,000 + 20\%$ navíc, tj. $12\,000 : 5 = 2\,400$, tj. 14 400 Kč.

Abychom zjistili, zda žáci úloze porozuměli dobře, můžeme jim položit doplňkovou otázku: „Nový kupec zaplatil za obraz 13 000 Kč bez provize. Kolik Kč vydělal pan Bohatý? Kolik Kč vydělala galerie na obou 20% provizích?“ (Pan Bohatý vydělal 1 000 Kč a galerie na obou provizích vydělala $2\,000 + 2\,600$ Kč.)

Pracovní list 1 k úloze Obraz



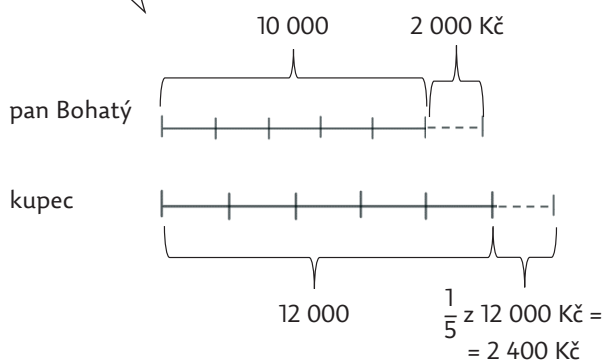
Pan Bohatý vydražil v aukční galerii obraz za 10 000 Kč. Kromě této částky byl ještě nucen zaplatit galerii provizi 20 % z ceny obrazu. Vše zaplatil, a jakmile dostal obraz do rukou, vrátil ho zpět do aukce ve stejné galerii, protože věřil, že obraz koupil lacino. Kolik minimálně by musel nový kupec i s 20% provizí za obraz zaplatit, aby pan Bohatý neprodělal?

XAVIER

20 % z ceny je vlastně jedna pětina z té ceny.

Znázorním si nejdřív situaci, když pan Bohatý obraz kupoval, a pak situaci, kdy obraz kupoval nějaký jiný kupec.

Provizi pro galerii si označím čárkovaně.



U nového kupce to bude provize alespoň ze 12 000, které by pan Bohatý chtěl dostat, aby neprodělal.

Takže obraz by se musel prodat minimálně za 14 400 Kč.



Nový kupec by i s provizí musel zaplatit minimálně 14 400 Kč.

MARYLIN

Když pan Bohatý musel zaplatit ještě dalších 20 %, pak za obraz zaplatil celkem 120 % z 10 000 Kč.

Vypočítám nejdříve 1 % a potom 120 % z částky 10 000 Kč.



100 % 10 000 Kč : 100
1 % 100 Kč : 120
120 % 12 000 Kč

Pan Bohatý za obraz zaplatil 12 000 Kč.

100 % 12 000 Kč
↓ : 100 ↓
1 % 120 Kč
↓ · 120 ↓
120 % x Kč

120
· 120
—
000
240
120
—
14400 = x

Aby neprodělal, potřebuje, aby nový kupec bez provize zaplatil za obraz alespoň těchto 12 000 Kč.

Zajímá nás částka s 20% provizí, proto opět vypočítáme 120 %. Budu postupovat stejně jako nahoře, jen s jinou částkou.



Pracovní list 2 k úloze Obraz



Pan Bohatý vydražil v aukční galerii obraz za 10 000 Kč. Kromě této částky byl ještě nucen zaplatit galerii provizi 20 % z ceny obrazu. Vše zaplatil, a jakmile dostal obraz do rukou, vrátil ho zpět do aukce ve stejné galerii, protože věřil, že obraz koupil lacino. Kolik minimálně by musel nový kupec i s 20% provizí za obraz zaplatit, aby pan Bohatý neprodělal?

MARYLIN

Když pan Bohatý musel zaplatit ještě dalších 20 %, pak za obraz zaplatil celkem 120 % z 10 000 Kč.

Vypočítám nejdříve 1 % a potom 120 % z částky 10 000 Kč.



100 % 10 000 Kč : 100
1 % 100 Kč : 100
120 % 12 000 Kč : 120

Pan Bohatý za obraz zaplatil 12 000 Kč.

100 % 12 000 Kč
↓ : 100 ↓
1 % 120 Kč
↓ · 120 ↓
120 % x Kč

120
· 120

000
240
120

14400 = x

Aby neprodělal, potřebuje, aby nový kupec bez provize zaplatil za obraz alespoň těchto 12 000 Kč.

Zajímá nás částka s 20% provizí, proto opět vypočítáme 120 %. Budu postupovat stejně jako nahoře, jen s jinou částkou.

Nový kupec by i s provizí musel zaplatit minimálně 14 400 Kč.



MEDARD

20 % částky odpovídá $\frac{1}{5}$ částky, takže pokud chci zjistit výši provize, vydělím 10 000 Kč číslem 5.

Tuto částku připočtu k částce bez provize, tedy k 10 000 Kč.



bez provize $\frac{5}{5}$ 10 000 Kč
provize $\frac{1}{5}$ 10 000 Kč : 5 = 2 000 Kč

s provizí 10 000 Kč + 2 000 Kč = 12 000 Kč
Pan Bohatý za obraz zaplatil 12 000 Kč.

Nyní z celkové částky, kterou nový kupec zaplatí, připadne panu Bohatému 80 %.

Tedy 80 % odpovídá částce 12 000 Kč.

Vypočítám 100 %.

80 % 12 000 Kč

12 000 : 80 = 150
400
00

1 % 12 000 Kč : 80 = 150 Kč

100 % 100 · 150 Kč = 15 000 Kč

Nový kupec by i s provizí musel zaplatit minimálně 15 000 Kč.



Metodický list k úloze Dojíždění

7. a 8. ročník

Téma: úměrnosti, zlomky, jednotky času

Pan Novák má novou, dobře placenou práci na protilehlém konci města u elektro-technické firmy Elektra. Každý den musí projet kopcovité serpentiny a cestou tam překonat i značné převýšení. Jako technik si snadno spočítal, že cesta městskou hromadnou dopravou (MHD) mu zabere o celou pětinu drahocenného času méně než cesta na jeho novém trekingovém kole. Město bylo bohatě protkáno sítí cyklistických stezek a výborně fungovaly i autobusové linky. Protože bylo slunečné počasí, prvních několik dní jezdil pan Novák do práce i zpět na svém kole. Na svých prvních cestách strávil přesně 6 hodin a 10 minut, což se mu zdálo být zbytečně moc. Kolik času by pan Novák strávil na cestách, kdyby tyto dny jezdil MHD?²⁵

Úloha je poměrně dlouhá, obsahuje hodně nadbytečných informací a vyžaduje od žáků schopnost porozumět delšímu textu. V množství informací se může ztratit klíčový údaj *pětina času*, proto na něj můžeme obrátit pozornost při diskusi o jazykové stránce zadání. Žáky můžeme vyzvat, aby úlohu přeformulovali tak, aby neobsahovala tolik nadbytečných informací, a teprve pak pokračovat v práci.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Podtrhni zeleně ty části úlohy, které **potřebuješ** znát k jejímu vyřešení, a červeně ty části úlohy, které jsou pro její řešení **nadbytečné**. Přeformuluj úlohu tak, aby vyjadřovala stejnou situaci, ale byla stručnější.

2. Vyjádři číslem slovo *pětina*.

3. Jaký způsob cesty do práce je pro pana Nováka časově výhodnější?

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Napiš svými slovy, co znamená slovo *převýšení*. Svě řešení ověř ve slovníku nebo na internetu.

5. Uveď synonyma, kterými bys v tomto textu mohl/a nahradit slova: *protilehlém*, *serpentine*, *drahocenného*, *protkáno*.

6. Z otázky slovní úlohy vypiš slovesné tvary a urči u nich osobu, číslo, způsob a rod. Vyber jednu gramatickou kategorii a uvaž, jak může ovlivnit text.

²⁵ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 375). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.

7. Ukázka náleží do administrativního stylu, konkrétně jde o část životopisu. Je to pravda?

8. a) Jakým způsobem vznikla zkratka MHD?
b) Které další způsoby obohacování slovní zásoby znáš? Uveď vlastní příklady.

Řešení

(1) Např. Pan Novák má novou práci. Spočítal si, že cesta městskou hromadnou dopravou (MHD) mu zabere o pětinu času méně než cesta na kole. Prvních několik dní jezdil pan Novák do práce i zpět na kole. Na cestách strávil přesně 6 hodin a deset minut. Kolik času by pan Novák strávil na cestách, kdyby tyto dny jezdil MHD? (2) $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{10}$, 20 %, 0,2. (3) Jízda MHD. (4) Rozdíl výšek dvou bodů;²⁶ vyučující může s žáky diskutovat o tom, že slovo *převýšení* slovníky neregistrují, lze využít i k dalším výkladům o slovtvorbě. (5) *Protějším, opačným; zatáčky; vzácného; propleteno.* (6) *Strávil by, jezdil by* – 3. osoba jednotného čísla, způsob podmiňovací, rod činný; například gramatické číslo – nelze změnit; slovesný způsob – lze změnit, ale otázka mírně změni význam a nenavazuje na předchozí text: *Kolik času pan Novák strávil na cestách, když tyto dny jezdil MHD?* (7) Ne – viz charakteristika životopisu. (8) a) Z prvních písmen vlastního jména (tzv. iniciálová zkratka – termín pro učitele); b) např. odvozování (*slunečný* – je i v textu) a skládání (*zeměpis*), přejímky z cizích jazyků (*treking* – je i v textu) apod.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe



V úloze musí žáci převádět jednotky času a využívat poměr. Nabízíme dvě dvojice řešení. První dvojice řešení se zaměřuje na uchopení klíčového faktu, že cesta MHD odpovídá $\frac{4}{5}$ cesty na kole. Kleopatra jej reprezentuje úsečkovým modelem, zatímco Achilles řeší jen výpočtem.

Druhou dvojici tvoří Achilovo a Hektorovo řešení. Hektor si uvědomil, že se jedná o přímou úměrnost, a poměr uchopuje způsobem, že na každých 5 minut na kole připadají 4 minuty v MHD.

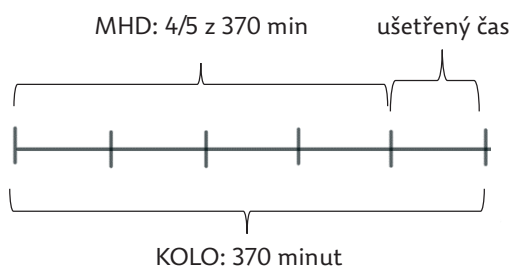
²⁶ <http://www.ujc.cas.cz/elektronicke-slovniky-a-zdroje>

Pracovní list 1 k úloze Dojíždění



Pan Novák má novou, dobře placenou práci na protilehlém konci města u elektrotechnické firmy Elektra. Každý den musí projet kopcovité serpentiny a cestou tam překonat i značné převýšení. Jako technik si snadno spočítal, že cesta městskou hromadnou dopravou (MHD) mu zabere o celou pětinu drahocenného času méně než cesta na jeho novém trekingovém kole. Město bylo bohatě protkáno sítí cyklistických stezek a výborně fungovaly i autobusové linky. Protože bylo slunečné počasí, prvních několik dní jezdil pan Novák do práce i zpět na svém kole. Na svých prvních cestách strávil přesně 6 hodin a 10 minut, což se mu zdálo být zbytečně moc. Kolik času by pan Novák strávil na cestách, kdyby tyto dny jezdil MHD?

KLEOPATRA



Nakreslím si obrázek. Z něj hned vidím, že musím počítat čtyři pětiny z 370 minut.

To je lehké, to je 296 minut.

Kdyby jezdil pan Novák MHD, strávil by na cestách 296 minut.

ACHILLES

cesta na kole 6 h 10 min
cesta MHD = $\frac{4}{5}$ cesta na kole

1 6 h 10 min = 370 min
 $\frac{1}{5}$ 370 min : 5 = 74 min
 $\frac{4}{5}$ 74 min · 4 = 296 min

Kdyby jezdil pan Novák MHD, strávil by na cestách 4 hodiny a 56 minut.



Pokud cesta MHD zabere o pětinu méně času než cesta na kole, znamená to vlastně, že zabere celkem čtyři pětiny ze 6 hodin a 10 minut.

Aby se mi s časem cesty na kole lépe počítalo, převedu si ho na minuty.

Vypočítám nejdříve jednu pětinu. Poté hodnotu, která přísluší jedné pětině, vynásobím čtyřmi.

Pracovní list 2 k úloze Dojíždění



Pan Novák má novou, dobře placenou práci na protilehlém konci města u elektrotechnické firmy Elektra. Každý den musí projet kopcovité serpentiny a cestou tam překonat i značné převýšení. Jako technik si snadno spočítal, že cesta městskou hromadnou dopravou (MHD) mu zabere o celou pětinu drahocenného času méně než cesta na jeho novém trekingovém kole. Město bylo bohatě protkáno sítí cyklistických stezek a výborně fungovaly i autobusové linky. Protože bylo slunečné počasí, prvních několik dní jezdil pan Novák do práce i zpět na svém kole. Na svých prvních cestách strávil přesně 6 hodin a 10 minut, což se mu zdálo být zbytečně moc. Kolik času by pan Novák strávil na cestách, kdyby tyto dny jezdil MHD?

HEKTOR

$$6 \text{ h a } 10 \text{ min} = 6 \cdot 60 \text{ min} + 10 \text{ min} = 370 \text{ min}$$

	MHD (min)	Kolo (min)
$\cdot k$	4	5
	x	370

$$k = 370 : 5 = 74$$

$$x = 4 \cdot k = 4 \cdot 74 \text{ min} = 296 \text{ min}$$

$$x = 4 \text{ h } 56 \text{ min}$$



Nejdříve si vyjádřím v minutách, kolik času strávil pan Novák na cestách.

Za každých 5 minut na kole ušetřím s MHD minutu. Tedy na 5 minut na kole připadají 4 minuty v MHD.

Jedná se o přímou úměrnost, proto 370 minutám na kole odpovídá 296 minut v MHD.

Kdyby jezdil pan Novák MHD, strávil by na cestách 4 hodiny a 56 minut.

ACHILLES

cesta na kole 6 h 10 min
cesta MHD = $\frac{4}{5}$ cesta na kole

$$1 \dots\dots\dots 6 \text{ h } 10 \text{ min} = 370 \text{ min}$$

$$\frac{1}{5} \dots\dots\dots 370 \text{ min} : 5 = 74 \text{ min}$$

$$\frac{4}{5} \dots\dots\dots 74 \text{ min} \cdot 4 = 296 \text{ min}$$

Kdyby jezdil pan Novák MHD, strávil by na cestách 4 hodiny a 56 minut.



Pokud cesta MHD zabere o pětinu méně času než cesta na kole, znamená to vlastně, že zabere celkem čtyři pětiny ze 6 hodin a 10 minut.

Aby se mi s časem cesty na kole lépe počítalo, převedu si ho na minuty.

Vypočítám nejdříve jednu pětinu. Poté hodnotu, která přísluší jedné pětině, vynásobím čtyřmi.

Metodický list k úloze Vleky I

7. a 8. ročník

Téma: úměrnosti

V lyžařském areálu jezdí vedle sebe starý vlek a nový vlek, oba jsou dlouhé 600 metrů. Starý vlek jezdí pomaleji než nový. Jana nastoupila na starý vlek a ve stejném okamžiku nastoupila Lenka na nový. Za stejnou dobu, za kterou Jana ujela polovinu cesty, ujela Lenka 400 m. Kolik metrů ujela Jana přesně do té chvíle, kdy Lenka vystupovala na konci z vleku?²⁷

V úloze žáci prokazují porozumění přímé úměrnosti. Úloha je komplikovaná, protože zahrnuje tři časové body. Proto může být žákům nápomocný nákres. V ideálním případě by měli být schopni situaci nakreslit sami. V našem výzkumu úlohu vyřešilo správně jen 20 % žáků na začátku 7. ročníku (ovšem ještě před probíráním přímé úměrnosti), přičemž hodně žáků řešilo úlohu „aditivně“ (podobně jako Margaret v pracovním listu).

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Nakresli si situaci. Kolik časových bodů je v úloze?
2. Rozhodni o každém z následujících tvrzení, zda jednoznačně vyplývá z textu:
 - a) Starý a nový vlek jsou stejně dlouhé.
 - b) Jana použila pro jízdu nahoru nový vlek.
 - c) Lenka jela na vleku rychleji než Jana.
 - d) Lenka byla nahoře první, protože na vlek nastoupila dříve.
3. Která z dívek byla první nahoře?

Rozvoj jazykové gramotnosti

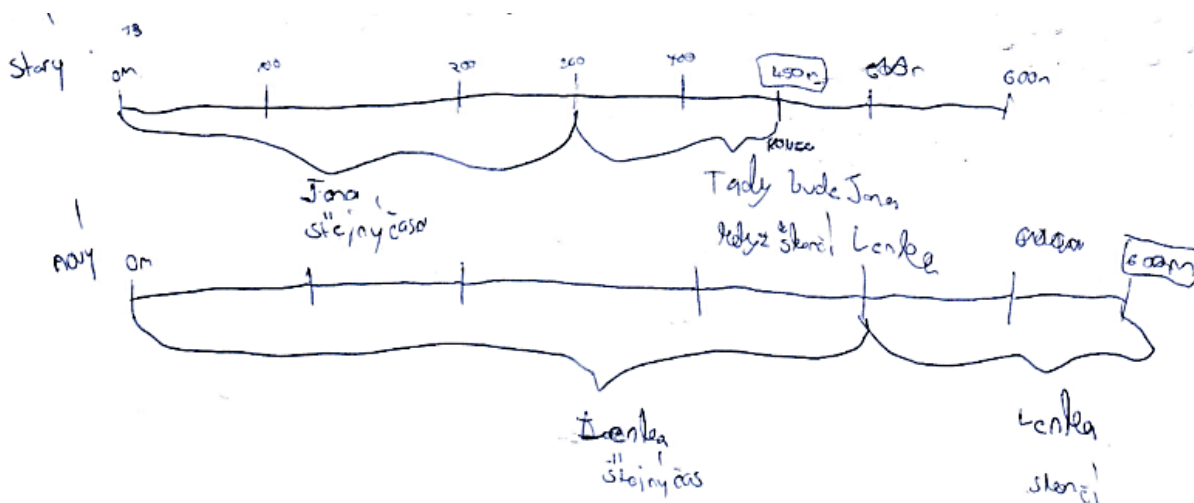
5. V prvním souvětí úlohy najdi další přívlastek vyjádřený přídavným jménem. Můžeme ho vynechat?
6. Z kolika vět se skládají všechna souvětí ve slovní úloze? Která můžeš převést na věty jednoduché, a která nikoliv? Proč?

²⁷ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 289). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.

4. V textu úlohy podtrhni přívlastky rozvíjející slovo vlek a vysvětli, proč jsou důležité pro pochopení slovní úlohy.

Řešení

(1) V úloze jsou tři časové body – když dívky nastoupily na vlek, když Jana dojezdila do poloviny vleku a když Lenka vystupovala z vleku; žákovský náčrsek je níže. (2) a) Ano; b) ne; c) ano; d) ne. (3) Lenka. (4) Starý a nový, vycházíme od sémantiky: přívlastek zpřesňuje význam podstatného jména, pokud bychom v úloze přívlastky vynechali, úloha by byla neřešitelná. (5) v lyžařském; uvědomění si sémantiky přívlastku: věta V areálu jezdí vedle sebe starý vlek a nový vlek by patrně byla srozumitelná, přívlastek lyžařský ji však významově zpřesňuje. (6) Ze dvou vět – žáci to zjistí podle počtu přísudků; pro starší žáky možno doplnit otázku na pravidlo o psaní čárky před než ve větě Starý vlek jezdí pomaleji než nový; pravidlo mohou žáci zjistit samostatně v Internetové jazykové příručce (dotaz než, kapitola Psaní čárky před spojkami jako, než). Transformace: V lyžařském areálu jezdí vedle sebe starý vlek a nový vlek. Oba jsou dlouhé 600 metrů (ano). Starý vlek jezdí pomaleji než nový. Jana nastoupila na starý vlek. Ve stejném okamžiku nastoupila Lenka na nový (ano). Za stejnou dobu, za kterou Jana ujela polovinu cesty, ujela Lenka 400 m (ne, vložená věta přívlastková, roztržením souvětí by informace ztratila smysl). Kolik metrů ujela Jana přesně do té chvíle, kdy Lenka vystupovala na konci z vleku? (ne, věta přívlastková, roztržením souvětí by informace ztratila smysl, neb by byla velmi neobratná: *Kolik metrů ujela Jana přesně do chvíle Lenčina vystoupení na konci z vleku?).



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Oba autoři nabízených řešení si nakreslili obrázek – vedeme žáky k tomu, aby ho pochopili, případně aby ho porovnali se svým. Řešení Quida je správné. Uvědomil si, že jde o přímou úměrnost, a úlohu řešil úvahou. Nesprávné řešení Margaret je dáno záměnou proporční situace za aditivní. To je častá chyba u žáků, kteří se snaží usoudit na výpočet vedoucí k řešení na základě klíčových slov nebo nedokáží řešit složitější proporční úlohu a přerámují si ji jako aditivní. Margaret řešila úlohu tak, jako by vlekly od poloviny cesty jezdily stejně rychle.



Návazná práce

Pro lepší pochopení proporčních úloh (úloh na přímou úměrnost) můžeme žákům předložit dvojice úloh, které jsou si velmi podobné povrchovou strukturou, ale které se liší v matematickém modelu. Aditivní varianty úloh jsou formulovány záměrně tak, aby připomínaly úlohy na přímou úměrnost.

Některé dvojice takových úloh, které jsme použili v našem výzkumu, uvedeme.²⁸ V závorce jsou výsledky. První úloha je použitelná i ve 4. či 5. ročníku, zbylé dvě na druhém stupni.

Proporční varianta	Aditivní varianta
Stonožky Věrka a Františka vyráží na výlet. Začaly se obouvat ve stejnou chvíli, ale Františka se obouvá rychleji. Za tutéž dobu, za kterou Věrka obuje 5 bot, obuje Františka 10 bot. Kolik bot má na sobě Františka, jestliže Věrka právě obula patnáctou botu? [30 bot]	Stonožky Věrka a Františka vyráží na výlet. Obouvají se obě stejně rychle, ale Františka začala dřív. V okamžiku, kdy měla Věrka obutých 5 bot, Františka už jich měla 10. Kolik bot má na sobě Františka, jestliže Věrka právě obula patnáctou botu? [20 bot]
Automatický jeřáb A4 a automatický jeřáb B5 nakládají krabice na nákladní auto. Začaly i skončily společně, ale jeřáb B5 nakládal rychleji. Za stejnou dobu, za kterou jeřáb A4 naložil 40 krabic, jeřáb B5 naložil 160 krabic. Jestliže jeřáb A4 naložil 80 krabic, kolik krabic za tu dobu naložil jeřáb B5? [320 krabic]	Automatický jeřáb A4 a automatický jeřáb B5 nakládají krabice na nákladní auto. Nakládají stejně rychle, ale jeřáb B5 začal dříve. V okamžiku, kdy měl jeřáb A4 naloženo 40 krabic, měl jeřáb B5 naloženo 160 krabic. Oba jeřáby přestaly pracovat ve stejném okamžiku. Jestliže jeřáb A4 celkem naložil 80 krabic, kolik krabic naložil jeřáb B5? [200 krabic]
Na rovné dráze jezdí jedno modré a jedno červené závodní autíčko. Vyjela najednou, ale červené jede rychleji. Za stejnou dobu, za kterou modré autíčko ujelo 150 cm, červené autíčko ujelo 300 cm. Jestliže modré autíčko ujelo 600 cm, kolik centimetrů za tu dobu ujelo červené autíčko? [1 200 cm]	Na rovné dráze jezdí jedno modré a jedno červené závodní autíčko. Jedou stejně rychle, ale červené autíčko vyjelo dříve. V okamžiku, kdy mělo modré autíčko ujeto 150 cm, červené autíčko mělo ujeto 300 cm. Autíčka přestala jezdit ve stejném okamžiku. Jestliže modré autíčko ujelo celkem 600 cm, kolik centimetrů ujelo červené autíčko? [750 cm]

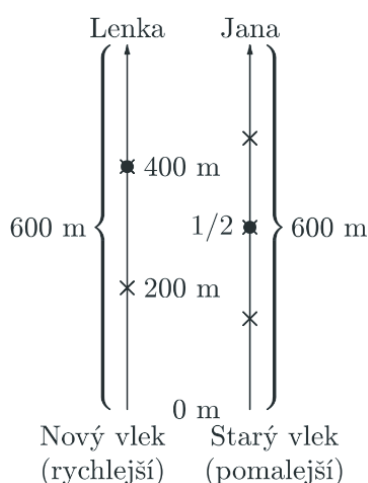
²⁸ Vondrová et al., 2019.

Pracovní list k úloze Vleky I



V lyžařském areálu jezdí vedle sebe starý vlek a nový vlek, oba jsou dlouhé 600 metrů. Starý vlek jezdí pomaleji než nový. Jana nastoupila na starý vlek a ve stejném okamžiku nastoupila Lenka na nový. Za stejnou dobu, za kterou Jana ujela polovinu cesty, ujela Lenka 400 m. Kolik metrů ujela Jana přesně do té chvíle, kdy Lenka vystupovala na konci z vleku

Margaret i Quido si nakreslili stejný obrázek, ale každý úlohu řešil jinak.



MARGARET

Nejdříve zjistím, kolik metrů musí Lenka ujet na konec vleku.

Vyšlo mi 200 m, takže i Jana musí určitě ujet 200 metrů.

$$600 - 400 = 200 \text{ m}$$

$$300 + 200 = 500 \text{ m}$$



Jana ujede celkem 500 metrů do chvíle, kdy Lenka již vystupuje z vleku.

QUIDO

$$600 - 400 = 200 \text{ m}$$

Lenka	Jana
400 m	 300 m
↓ 200 m	 150 m ↓

$$600 \text{ m} \dots\dots\dots 450 \text{ m}$$

Nejdříve zjistím, kolik musí Lenka ještě ujet.

Je to přímá úměrnost.

Za každých Lenčiných 200 metrů ujede Jana 150 metrů.



Jana ujela 450 metrů do chvíle, kdy Lenka již vystupuje z vleku.

Metodický list k úloze Vleky II

6. až 8. ročník

Téma: aditivní úloha, zdánlivá úměrnost

V lyžařském areálu jezdí vedle sebe starý vlek a nový vlek, oba jsou dlouhé 600 metrů a jezdí stejně rychle. Jana jela na starém vleku a Lenka jela novým. Jana nasedla na vlek později, v okamžiku, kdy se dostala do poloviny cesty, Lenka měla ujeto 400 m. Kolik metrů ujela Jana přesně do té chvíle, kdy Lenka vystupovala na konci z vleku?²⁹

Úloha má povrchovou strukturu přímé úměrnosti, ale jedná se o aditivní úlohu (úlohu bychom mohli nazvat zdánlivým modelem přímé úměrnosti) a můžeme ji zadat i před probíráním přímé úměrnosti. Úlohu v našem výzkumu řešilo správně jen 57 % žáků na začátku 7. ročníku (před probíráním přímé úměrnosti)³⁰. Použili jsme ještě další dvojice úloh a porovnali jsme úspěšnost aditivní a proporční varianty. Zatímco žáci před probíráním úměrností byli v aditivních úlohách poměrně úspěšní (a v proporčních neúspěšní), jakmile se seznámili s úměrnostmi, výrazně se v aditivních úlohách zhoršili. Souvislost s probíráním úměrnosti ve škole je zjevná. Místo aby si žáci udělali situační model, automaticky na základě povrchové struktury úlohy předpokládali, že půjde o přímou úměrnost. Proto doporučujeme úlohu zadat i v době, kdy se žáci s přímou úměrností již setkali.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Nakresli si situaci. Kolik časových bodů je v úloze?
2. Rozhodni o každém z následujících tvrzení, zda jednoznačně vyplývá z textu:
 - a) Starý a nový vlek jsou stejně dlouhé.
 - b) Jana použila pro jízdu nahoru nový vlek.
 - c) Lenka jela na vleku rychleji než Jana.
 - d) Lenka byla nahoře první, protože na vlek nastoupila dříve.

Rozvoj jazykové gramotnosti

5. V prvním souvětí úlohy najdi další přívlastek vyjádřený přídavným jménem. Můžeme ho vynechat?
6. Z kolika vět se skládají všechna souvětí ve slovní úloze? Která můžeš převést na věty jednoduché, a která nikoliv? Proč?

²⁹ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 289). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologii*. Karolinum.

³⁰ Vondrová et al., 2019.

3. Která z dívek byla první nahoře?

4. V textu úlohy podtrhni přívlastky rozvíjející slovo vlek a vysvětli, proč jsou důležité pro pochopení slovní úlohy.

Řešení

(1) V úloze jsou tři časové body – když Jana nasedla na vlek, když Jana dojezdila do poloviny vleku a když Lenka vystupovala z vleku. Možný náčrt je v řešení v pracovním listu. (2) a) Ano; b) ne; c) ne; d) ano. (3) Lenka. (4) *Starý* a *nový*, vycházíme od sémantiky: přívlastek zpřesňuje význam podstatného jména, pokud bychom v úloze přívlastky vynechali, úloha by byla neřešitelná. (5) V *lyžařském areálu*; otázka rozvíjí uvědomění si sémantiky přívlastku: věta *V areálu jezdí vedle sebe starý vlek a nový vlek* by patrně byla srozumitelná, přívlastek *lyžařský* ji však významově zpřesňuje. (6) Stejně jako v úloze Vleky I; žáci to zjistí podle počtu přísudků.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Oba autoři nabízených řešení si nakreslili obrázek. Učitel by měl žáky vést k tomu, aby ho pochopili, případně aby ho porovnali se svým. Madonna se dopustila očekávané chyby, nechala se zmást povrchovou strukturou úlohy a řešila ji jako situaci přímé úměrnosti. Řešení Šanela je správné.



Návazná práce

Pro lepší pochopení proporčních úloh (úloh na přímou úměrnost) můžeme žákům předložit dvojice úloh, které jsou si velmi podobné povrchovou strukturou, ale které se liší v matematickém modelu. Aditivní varianty úloh jsou formulovány záměrně tak, aby připomínaly úlohy na přímou úměrnost. Některé dvojice takových úloh, které jsme použili v našem výzkumu, uvedeme.³¹ V závorce jsou výsledky. První úloha je použitelná i ve 4. či 5. ročníku, zbylé dvě na druhém stupni.



³¹ Vondrová et al., 2019.

Proporční varianta

Stonožky Věrka a Františka vyráží na výlet. Začaly se obouvat ve stejnou chvíli, ale Františka se obouvá rychleji. Za tutéž dobu, za kterou Věrka obuje 5 bot, obuje Františka 10 bot. Kolik bot má na sobě Františka, jestliže Věrka právě obula patnáctou botu? [30 bot]

Automatický jeřáb A4 a automatický jeřáb B5 nakládají krabice na nákladní auto. Začaly i skončily společně, ale jeřáb B5 nakládal rychleji. Za stejnou dobu, za kterou jeřáb A4 naložil 40 krabic, jeřáb B5 naložil 160 krabic. Jestliže jeřáb A4 naložil 80 krabic, kolik krabic za tu dobu naložil jeřáb B5? [320 krabic]

Na rovné dráze jezdí jedno modré a jedno červené závodní autíčko. Vyjela najednou, ale červené jede rychleji. Za stejnou dobu, za kterou modré autíčko ujelo 150 cm, červené autíčko ujelo 300 cm. Jestliže modré autíčko ujelo 600 cm, kolik centimetrů za tu dobu ujelo červené autíčko? [1 200 cm]

Aditivní varianta

Stonožky Věrka a Františka vyráží na výlet. Obouvají se obě stejně rychle, ale Františka začala dřív. V okamžiku, kdy měla Věrka obutých 5 bot, Františka už jich měla 10. Kolik bot má na sobě Františka, jestliže Věrka právě obula patnáctou botu? [20 bot]

Automatický jeřáb A4 a automatický jeřáb B5 nakládají krabice na nákladní auto. Nakládají stejně rychle, ale jeřáb B5 začal dřív. V okamžiku, kdy měl jeřáb A4 naloženo 40 krabic, měl jeřáb B5 naloženo 160 krabic. Oba jeřáby přestaly pracovat ve stejném okamžiku. Jestliže jeřáb A4 celkem naložil 80 krabic, kolik krabic naložil jeřáb B5? [200 krabic]

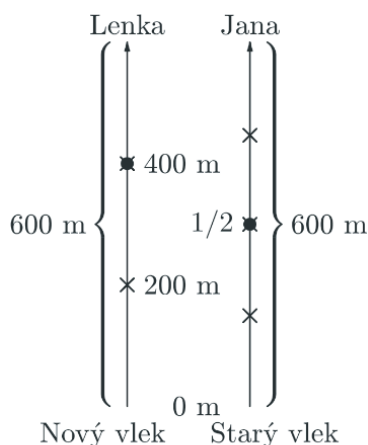
Na rovné dráze jezdí jedno modré a jedno červené závodní autíčko. Jedou stejně rychle, ale červené autíčko vyjelo dřív. V okamžiku, kdy mělo modré autíčko ujeto 150 cm, červené autíčko mělo ujeto 300 cm. Autíčka přestala jezdit ve stejném okamžiku. Jestliže modré autíčko ujelo celkem 600 cm, kolik centimetrů ujelo červené autíčko? [750 cm]

Pracovní list k úloze Vleky II



V lyžařském areálu jezdí vedle sebe starý vlek a nový vlek, oba jsou dlouhé 600 metrů a jezdí stejně rychle. Jana jela na starém vlek a Lenka jela novým. Jana nasedla na vlek později, v okamžiku, kdy se dostala do poloviny cesty, Lenka měla ujeto 400 m. Kolik metrů ujela Jana přesně do té chvíle, kdy Lenka vystupovala na konci z vleků?

Šanel i Madonna si nakreslili stejný obrázek, ale každý úlohu řešil jinak.



ŠANEL

Nejdříve zjistím, kolik metrů musí Lenka ujet na konec vleku.

Vyšlo mi 200 m, takže i Jana musí určitě ujet ještě 200 metrů.

$$600 - 400 = 200 \text{ m}$$

$$300 + 200 = 500 \text{ m}$$



Jana ujede celkem 500 metrů do chvíle, kdy Lenka již vystupuje z vleku.

MADONNA

Nejdřív zjistím, kolik musí Lenka ještě ujet.

Je to přímá úměrnost.

Kolik ujede Jana za stejný čas co Lenka?

Za každých Lenčiných 200 metrů ujede Jana 150 metrů.

$$600 - 400 = 200 \text{ m}$$

	Lenka	Jana
	400 m	300 m
↓	200 m	150 m
	600 m	450 m

$$600 \text{ m} \dots\dots\dots 450 \text{ m}$$



Jana ujela 450 metrů do chvíle, kdy Lenka již vystupuje z vleku.

Metodický list k úloze Třída

7. a 8. ročník

Téma: zlomky, pořadí informací

I s učitelem navštěvuje třídu celkem 24 osob. Po poslední vyučovací hodině polovina žáků třídy odešla do školní jídelny na oběd, čtvrtina domů a zbytek na hřiště. Na poslední hodině tři žáci chyběli. Kolik žáků šlo na hřiště?³²

Úloha je výpočtově jednoduchá, ale je komplikovaná hutností informací a pořadím, v jakém jsou údaje nutné k řešení předkládány. Žáci by si měli uvědomit přítomnost tří časových rovin (*před poslední vyučovací hodinou, poslední vyučovací hodina, po poslední vyučovací hodině*) a správně do nich zařadit jednotlivé informace. Úloha je komplikována i tím, že nelze počítat zleva doprava (*jak informace přicházejí*), ale že je důležitá informace (*na poslední hodině tři žáci chyběli*) zařazena až na konec.

Pořadí informací hraje v obtížnosti slovní úlohy velkou roli. V našem výzkumu³³ se potvrdilo, že přesuneme-li některou z informací na jiné místo zadání, než kam chronologicky patří, může se úloha významně ztížit, a to zejména pro ty žáky, kteří úlohu nedočtou nejdříve do konce, ale průběžně si vypisují ze zadání úlohy informace a tvoří výpočty. Tomuto přístupu se snažíme u žáků vyhnout tím, že před řešením úlohy zaměříme jejich pozornost na celkové porozumění jejího zadání.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Kolik žáků chodí do třídy, o níž se mluví v úloze?
2. Napiš slovo *polovina* a *čtvrtina* matematickým výrazem. Použij dva různé způsoby.
3. Max četl zadání a počítal: *Bez učitele je to 23 žáků, polovina odešla, tak by jich muselo odejít 11,5. Takže to je špatné zadání, nedá se to řešit.* Posuď, zda má Max pravdu. Vysvětli, proč ano, proč ne.

Rozvoj jazykové gramotnosti

7. Napiš základní skladební dvojici druhé věty a vysvětli, čím je v českém jazyce zvláštní.
8. Posuď druhý větný celek. Jedná se o souvětí, nebo o větu jednoduchou? Proč je důležité toto umět i mimo hodiny českého jazyka?
9. Jak by se změnil text úlohy z pravopisného hlediska, pokud bychom místo slova *žáci* použili slovo *děti*?

³² Úlohu a řešení fiktivních žáků vytvořil Ondřej Kohout.

³³ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.

4. Posuď slovní úlohu z hlediska časové a logické návaznosti a přeformuluj ji, aby události následovaly správně po sobě.

10. Jakým slovním druhem a jakým typem tohoto slovního druhu jsou slova *polovina* a *čtvrtina*?

5. Kolik žáků bylo přítomno na poslední hodině?

6. Kolik žáků odešlo do školní jídelny na oběd?

Řešení

(1) 23 žáků. **(2)** $\frac{1}{2}$, 0,5; $\frac{1}{4}$, 0,25. **(3)** Max nedočel úlohu a počítal průběžně, to je častá tendence žáků; tato strategie u úlohy selhává, protože podstatná informace je uvedena na konci zadání. **(4)** *I s učitelem navštěvuje třídu celkem 24 osob. Na poslední hodině tři žáci chyběli. Po poslední hodině polovina žáků třídy odešla do školní jídelny na oběd, čtvrtina domů a zbytek na hřiště. Kolik žáků šlo na hřiště?* **(5)** 20 žáků. **(6)** 10 žáků. **(7)** *Polovina odešla* – obtížnější případ shody podle formy, a nikoliv podle významu. **(8)** Žáci počet vět zjistí spočítáním přísudků; souvětí: *V úterý trvalo vyučování pět hodin, ale na poslední hodině tři žáci chyběli.* Důležitost důležitá pro správné psaní čárek. **(9)** Změnila by se koncovka u slovesa: *chyběly*. **(10)** Číslovky základní.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Izolda použila strategii signálních slov. Její strategie je zcela povrchová bez snahy o tvorbu situačního modelu. Určila z čísla 24 polovinu, čtvrtinu a zbytek a od něj odečetla tři žáky, protože chyběli. Její řešení je nesprávné.



Tristan si vytvořil dobrý situační model. Správně určil, kolik žáků bylo poslední hodinu přítomno, a využil zlomky namísto konkrétních počtů žáků. Tím zjistil, jaká část žáků zbývá do celku. Jeho řešení je správné.

Pracovní list k úloze Třída



I s učitelem navštěvuje třídu celkem 24 osob. Po poslední hodině polovina žáků třídy odešla do školní jídelny na oběd, čtvrtina domů a zbytek na hřiště. Na poslední hodině tři žáci chyběli. Kolik žáků šlo na hřiště?

IZOLDA

Nejdřív si určím polovinu a čtvrtinu z 24.

Ted' sečtu počty žáků.

Odečtu 18 od 24.

Tři žáci chyběli, takže ještě odečtu 3.

Mám výsledek.

celkem 24
 $1/2 \dots\dots\dots 24 : 2 = 12$
 $1/4 \dots\dots\dots 24 : 4 = 6$

$$12 + 6 = 18$$

$$24 - 18 = 6$$

$$6 - 3 = 3$$

3 žáci



Na hřiště odešli 3 žáci.

TRISTAN

přítomní žáci..... x

$$24 - 1 - 3 = 20$$

$$x = 20$$

$$1/2 + 1/4 = 3/4$$

$$20 : 4 = 5$$

5 žáků

Nejdřív určím, kolik žáků bylo přítomno na poslední hodině. Od 24 odečtu 1 za učitele a 3 za chybějící žáky.

Na poslední hodině bylo 20 žáků. Z tohoto počtu budu zjišťovat, kolik žáků šlo kam.

Sečtu polovinu a čtvrtinu (tu část žáků, kteří šli na oběd a domů), zbývá tedy jedna čtvrtina do celku.

Čtvrtina žáků šla na hřiště. To je 5 žáků.



Na hřiště odešlo 5 žáků.

Metodický list k úloze Kostky

7. a 8. ročník

Téma: hra s kostkami, zlomky

Karel a Jarda hráli kostky o virtuální body. Kdo v kole hodil menší součet, musel přepsat polovinu svých bodů na soupeře (bylo přípustné převádět i necelé body). Z těchto bodů se pak staly soupeřovy body. Oba hráči měli na začátku hry stejně bodů. Karel v úvodu prohrál dvě kola za sebou, pak jedno kolo vyhrál. Kdo měl po třetím kole více bodů? Svou odpověď zdůvodněte.³⁴

Řešení této úlohy může být pro žáky překvapivé, protože hra je spravedlivá. Myšlenka, že může mít někdo po třetím kole více žetonů, přestože dvakrát prohrál a pouze jednou vyhrál, se jeví jako nemožná. Pro lepší představu můžeme žáky požádat, aby několik partií hry sehráli či si vytvořili tabulku a do ní zapsali možné výsledky jednotlivých kol. Řešení úlohy vyžaduje systematický přístup.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Co to znamená *hodit menší součet*? Uveď na libovolném příkladu
2. Je pro řešení úlohy nezbytná informace *Z těchto bodů se tak staly soupeřovy body*?
3. Bez počítání se pokus odhadnout, kdo měl po třetím kole více žetonů. Zdůvodni svůj odhad.
4. Vytvoř si tabulku a zapiš si několik možných partií hry.

Rozvoj jazykové gramotnosti

5. Zjisti podle Internetové jazykové příručky, jak se nazývá hra, při níž se hází kostkami (stejně jako v případě Karla a Jardy).
6.
 - a) Jaký je rozdíl mezi podobami jmen Karel a Jarda? Uveď domácké podoby jména Karel a základní podobu jména Jarda.
 - b) Má podoba jména vliv na řešení úlohy?
7. Řekni svými slovy, v jakém významu je v textu úlohy použito slovo *kolo*. Najdi slovo *kolo* v některém z výkladových slovníků češtiny. Přečti nahlas ten význam, který podle tebe odpovídá významu, ve kterém je slovo *kolo* použito v této slovní úloze.
8. Vedlejší větu podmětovou vyjádři podmětem a posuď stylistickou vhodnost nově vzniklé věty.

³⁴ Úlohu a řešení fiktivních žáků vytvořil Ondřej Kohout a upravil autorský tým Metodiky.

Řešení

(1) Zjišťujeme, zda žák rozumí kontextu úlohy a frazeologickému *hodit součet* (tedy hodit nespecifikovaným počtem kostek a zjistit, jaký vyjde součet ok). (2) Není, tato informace je obsažena již v předchozí větě. (3) Viz poznámka v popisu úlohy. (4) Žáci mohou buď skutečně házet kostkami a zaznamenávat výsledky, nebo mohou vytvářet hypotetické partie; cílem je, aby si vytvořili dobrou představu o situaci, což jim může usnadnit tvorbu matematického modelu úlohy. (5) *Internetová jazyková příručka* uvádí „hra v kostky“ – hledání ve zdrojích, rozšiřování slovní zásoby, diskuse. (6) a) Jedná se o vlastní jména, Karel je neutrální podoba jména; Jarda je vlastní jméno domácké; Kája, Karlík, Karlíček...; Jaromír, Jaroslav, b) nemá. (7) Kulatý předmět podobný minci, používá se jako náhrada za peníze např. při hrách, do nákupních košíků apod. – procvičujeme popis předmětu; část hry – „část utkání n. sportovní i jiné soutěže“ (*Slovník spisovného jazyka českého*³⁵). (8) Obtížná úloha dle úrovně třídy, např. *Poražený musel odevzdat polovinu svých žetonů soupeři*; úloha vhodná jako transformační cvičení a pro demonstraci, že nelze vždy bez modifikace významu větu vyjádřit větným členem a naopak; zde slovo *poražený* může sloužit jako dobrá ukázka podstatného jména, přičemž jiné je adjektivum.³⁶



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe



Obě předložená řešení jsou správná. Makar oběma hráčům přidělil určitý počet počátečních bodů. Postupoval systematicky s využitím tabulky, kterou postupně vyplňoval. Je otázkou, do jaké míry si Makar uvědomoval, že si mohl zvolit libovolnou hodnotu, tedy zda si byl vědom obecnosti svého řešení. O tom lze zavést s žáky diskusi. Je možné je vést k tomu, aby si podobnou tabulku vytvořili obecně pro x počátečních bodů. Heda řešila úlohu pomocí zlomků. Ne zvolila si konkrétní počáteční stav, a proto je její řešení univerzálnější. Pokud by byla úloha zadána tak, že by byl uveden počet bodů jednoho z hráčů po třetím kole a úkolem by bylo najít původní stavy bodů a průběh hry (tedy kdo v jakém kole prohrál), Makarova strategie by byla neefektivní.

³⁵ <https://ssjc.ujc.cas.cz/search.php?hledej=Hledat&heslo=kolo&sti=EMPTY&where=hesla&hsubstr=no>

³⁶ *Internetová jazyková příručka* (<https://prirucka.ujc.cas.cz/?id=602>).

Pracovní list k úloze Kostky



Karel a Jarda hráli kostky o virtuální body. Kdo v kole hodil menší součet, musel přepsat polovinu svých bodů na soupeře (bylo přípustné převádět i necelé body). Z těchto bodů se pak staly soupeřovy body. Oba hráči měli na začátku hry stejně bodů. Karel v úvodu prohrál dvě kola za sebou, pak jedno kolo vyhrál. Kdo měl po třetím kole více bodů? Svou odpověď zdůvodněte.

MAKAR

HEDA

Představím si, že měli oba na začátku 20 bodů.

Tomu, kdo prohrál, odeberu polovinu a dám ji druhému.

Po třetím kole měl víc bodů Karel.

Karel	Jarda
20	20
10	30
5	35
22,5	17,5

$22,5 > 17,5 \rightarrow$ Karel

Začátek:

Karel 1

Jarda 1

Po 1. kole:

Karel $1 : 2 = \frac{1}{2}$

Jarda $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Po 2. kole:

Karel $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$

Jarda $\frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

Po 3. kole:

Karel $\frac{1}{4} + \frac{7}{8} = \frac{9}{8}$

Jarda $\frac{7}{4} : 2 = \frac{7}{8}$

Na začátku měli oba hráči stejně bodů, každý měl tedy jeden celek.

Po 1. kole už měl Karel jen polovinu. Jardovi tato polovina přibyla.

Po 2. kole měl Karel už jen čtvrtinu. Ta opět přibyla Jardovi.

Po 3. kole ale přibyla Karlovi polovina z Jardových bodů.

Celkem měl tedy Karel více.



Karel měl po třetím kole více bodů.



Metodický list k úloze Koláč

7. a 8. ročník

Téma: multiplikativní operace se zlomky, poměr

Dana peče brusinkový koláč z velké dávky, která je jedenapůlkrát větší, než uvádí původní recept. Jestliže v původním receptu bylo zapotřebí $\frac{3}{4}$ šálku cukru, kolik šálků cukru Dana pro svůj koláč potřebuje?

Žáci si v úloze upevňují pochopení zvětšování za použití zlomků a reprezentaci termínu „ n -krát větší“. Úloha pochází z testování TIMSS 2007, kde byla zadána jako uzavřená s výběrem odpovědi. Úspěšnost žáků 8. ročníku v jejím řešení byla 26 %.³⁷ V našem výzkumu úlohu správně řešilo jen 22 % žáků 7. ročníku a 32 % žáků 9. ročníku.³⁸ Problém působí slova „jedenapůlkrát větší“. Žáci si musí uvědomit, že v kontextu zadání to znamená, že se bude násobit číslem 1,5. Proto se na tento rys zadání zaměřují i navržené úkoly na porozumění textu.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Která informace přímo vyplývá z textu slovní úlohy?
 - a) Daně bude stačit nanejvýše jeden šálek cukru.
 - b) Dana potřebuje 1,5krát tolik cukru, než uváděl původní recept.
 - c) Šálek cukru má objem 0,75 l.
 - d) Váha cukru v původním receptu byla 750 g.

Rozvoj jazykové gramotnosti

4.
 - a) Vyhledej v Internetové jazykové příručce poučení, jak zapisujeme výrazy složené z číslic a slov (složené číselné výrazy): *dvanaáctiprocentní, osmimetrový, tříkilogramový, osminásobný, osminásobek, čtyřnásobně, dvacetkrát.*
 - b) Ke každému typu vymysli další s jinou číslicí a použij je ve větě.
 - c) Jaký je rozdíl mezi psaním *dvanaáct procent* a *dvanaáctiprocentní*, pokud chceš použít číslici a značku pro procenta (%)?

³⁷ Tomášek, V. et al. (2009, s. 23). Výzkum TIMSS 2007. Úlohy z matematiky pro 8. ročník. Ústav pro informace ve vzdělávání.

³⁸ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvátal, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 127–128). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.

- | | |
|--|--|
| <p>2.</p> <p>a) Podtrhni slova, která nejsou nezbytně nutná pro vyřešení slovní úlohy: <i>Dana peče brusinkový koláč z velké dávky, která je jedenapůlkrát větší, než uvádí původní recept.</i></p> <p>b) O který větný člen se jedná?</p> | <p>5.</p> <p>a) V textu se dvakrát vyskytuje neshodný přívlastek. Najdi ho a na příkladech dolož, proč je neshodný.</p> <p>b) Vytvoř tři podobné příklady a použij je ve větách.</p> |
| <p>3. Přeformuluj první souvětí tak, aby namísto <i>jedenapůlkrát větší</i> bylo <i>jedenapůlkrát menší</i>. Neměň význam souvětí.</p> | <p>6. Samostatně zpracuj slohový útvar popis pracovního postupu – recept na pečení brusinkového koláče.</p> |

Řešení

(1) a) Ne, v otázce úlohy je množné číslo, b) ano, je použit formát psaní výrazu složeného z číslice a slova; c) ne, o objemu šálku se v úloze nepíše, d) ne, o váze cukru se v úloze nepíše. (2) a) *Dana peče brusinkový koláč z velké dávky, která je jedenapůlkrát větší, než uvádí původní recept*, b) přívlastek. (3) Např.: V původním receptu je uvedena dávka *jedenapůlkrát menší, než potřebuje Dana na upečení velkého koláče*. (4) a) Viz Internetová jazyková příručka³⁹, b) samostatná práce, c) 12 % (s mezerou) = dvanáct procent, 12% (bez mezery) = dvanáctiprocentní (pravopisu procent doporučujeme věnovat zvýšenou pozornost, neboť se v něm často chybí, přitom různé psaní zásadně mění význam). (5) *Šálek cukru, šálků cukru* – při skloňování v jednotném i množném čísle nemění tvar, zůstává stále v genitivu, což žáci jednak vidí v textu, jednak si to mohou vyzkoušet vypsáním celého paradigmatu, b) *sklenice vody, hrnek mléka, pytlík mouky...* (6) Popis pracovního postupu: samostatná práce: schopnost správného zápisu ingrediencí a jejich množství, časová a kauzální návaznost (bohaté používání příslovcí a spojek), slovní zásoba – slovesa, adjektiva.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Aida úlohu řešila správně násobením číslem 1,5, přičemž výpočet provedla za pomoci převodu desetinného čísla na zlomek. Tím se jí výpočty zjednodušily. Žáci mají však spíše tendenci pracovat s desetinnými čísly, proto je u Aidina řešení vhodné s nimi o užitečnosti převodu na zlomek diskutovat.



Makar chybně interpretoval termín *jedenapůlkrát větší* jako *o jeden a půl dávky větší*; násobil tedy číslem 2,5 namísto 1,5. To je častá chyba.

Porozumění žáků můžeme dále prověřit položením otázky „Do původního receptu patří 24 gramů kakaa. Kolik gramů kakaa potřebuje Dana do velké dávky?“. (Výsledek je 36 g kakaa.) Vhodné je také žáky požádat, jak by namodelovali situaci $\frac{3}{4}$ krát 1,5.

³⁹ <https://prirucka.ujc.cas.cz/?id=790&dotaz=%C4%8D%C3%ADslovky>

Pracovní list k úloze Koláč



Dana peče brusinkový koláč z velké dávky, která je jedenapůlkrát větší, než uvádí původní recept. Jestliže v původním receptu bylo zapotřebí $\frac{3}{4}$ šálku cukru, kolik šálků cukru Dana pro svůj koláč potřebuje?

AIDA

Když vidím v úloze spojení „*nkrát větší*“, budu násobit číslem *n*. V tomhle případě je $n = 1,5$.



původní dávka..... $\frac{3}{4}$ šálku cukru
větší dávka $1,5 \cdot$ původní dávka

$$1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

$$\checkmark = 1,5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$$

$$\checkmark = \frac{9}{8}$$

Počet šálků na větší dávku označím $\checkmark$.

Převedu si číslo 1,5 na zlomek.

Ted' mám dva zlomky, které spolu mohou snadno vynásobit.

Dostávám, že na koláč bude potřeba $\frac{9}{8}$ šálku cukru.

Dana potřebuje na velkou dávku $\frac{9}{8}$ šálků cukru, tedy jeden celý šálek a ještě jeho jednu osminu.



MAKAR

Když je velká dávka jedenapůlkrát větší, k původní dávce ještě přičtu tuto dávku jedenapůlkrát. Celkem se tak velká dávka bude skládat ze dvou a jedné poloviny původní dávky.



původní dávka..... $\frac{3}{4}$ šálku cukru
větší dávka 2 a $\frac{1}{2}$ původní dávky

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$$

$$\checkmark = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$$

$$\checkmark = \frac{15}{8}$$

Počet šálků na větší dávku označím $\checkmark$.

V prvním kroku vypočítám jednu polovinu ze $\frac{3}{4}$.

Ted' vezmu dvě původní dávky a tuto hodnotu k nim přičtu.

Dana potřebuje na velkou dávku $\frac{15}{8}$ šálků cukru, tedy jeden celý šálek a ještě jeho sedm osmin.



Metodický list k úloze Kapesné

7. a 8. ročník

Téma: dělení celku na části, rovnice

Dominik a Milka dostali dohromady 410 korun kapesného. Dominik, protože je starší, dostal o 100 korun více než Milka. Kolik korun dostala Milka?⁴⁰

Úlohy POR17 (Tělocvik), POR18 (Dárky), POR19 (Sourozenci), POR20 (Cyklovýlet) a POR34 (Utrácení) patří mezi slovní úlohy, v nichž se jedná o dělení celku na nestejné části. Ty se běžně řeší pomocí sestavení rovnice. Lze je však s úspěchem řešit i za pomoci obrázku, který údaje ze zadání a vztahy mezi nimi názorně ukazuje. Takový obrázek je současně i legendou („zápisem“) slovní úlohy. Před předložením řešení fiktivních žáků doporučujeme žáky vyzvat, aby si nějaký přehledný obrázek nakreslili. Ten mohou následně porovnat s námi navrhovaným znázorněním pomocí úsečkového diagramu. Pokud jejich vlastní obrázek nebude situaci ze zadání úlohy dostatečně vystihovat, jejich vlastní pokusy jim alespoň pomohou lépe pochopit obrázek fiktivního žáka.

Pro některé žáky může být řešení pomocí obrázku názornější. Pro všechny žáky je však přínosné, když si na základě porovnání námi nabízených strategií uvědomí, že způsob řešení je v obou případech stejný. V jednom případě jsou údaje a vztahy mezi nimi reprezentovány pomocí obrázků (úseček) a ve druhém případě symbolicky (rovnici). Žáci si tak mohou i lépe představit význam písmene x jako neznámé.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Z textu úlohy vyplývá, že Dominik dostal 310 korun. Je to pravda?
2. Z textu úlohy vyplývá, že Milka měla naspořeno více než Dominik. Je to pravda?
3. Z textu úlohy vyplývá, že Dominik má ve své kasičce více peněz než Milka. Je to pravda?

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Uveď synonymum slovesa *dostat* (ve stejném významu jako v textu slovní úlohy) a využij je pro vhodnější přeformulování slovní úlohy.
5. Pokus se podrobněji vylíčit situaci slovní úlohy. Dopln do první věty příslovečné určení a vedlejší větu a do druhé věty alespoň dva přívlastky.

⁴⁰ Miťková, E. (2009.) *Rozvoj algebraického myslenia u žiakov základných a stredných škôl*. Disertační práce. Univerzita Komenského v Bratislavě. Do zadání jsme dodali „protože je starší“.

6. Pokus se příběh dokončit.

Řešení

(1) Ne. **(2)** Ne. **(3)** Ne. **(4)** Obdrželi, získali. **(5)** Například: Dominik a Milka dostali dohromady 410 korun, protože oba pomáhali uklízet spadané listy. Starší Dominik dostal o 100 korun více než malá Milka. **(6)** Otevřená úloha.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Obě řešení jsou správná. Polana řešila úlohu pomocí úsečkového diagramu, z něhož je řešení dobře vidět. Hektor si sestavil rovnici, kterou správně vyřešil.



Znalost obou způsobů řešení je pro žáky užitečná. Nejde o to, aby byl jeden způsob prohlášen za lepší, ale o seznámení žáků s oběma variantami řešení. Příležitostí k řešení slovních úloh rovnicemi mají žáci zpravidla dost, naproti tomu učebnice obvykle nenabádají k řešení pomocí vizualizace.

Pracovní list k úloze Kapesné



Dominik a Milka dostali dohromady 410 korun kapesného. Dominik dostal o 100 korun více než Milka. Kolik korun dostala Milka?

POLANA

Udělám si obrázek. Kapesné pro Milku si znázorním úsečkou a k ní přidám těch 100 Kč, abych dostala úsečku pro kapesné Dominika.



Ani nemusím nic počítat, protože z obrázku hned vidím, že ty dvě stejné úsečky musí znázorňovat 310 Kč, a tedy jedna úsečka znázorňuje 155 Kč.

Milka dostala 155 Kč.

HEKTOR

Označím si nejdříve obě neznámé a kapesné Dominika vyjádřím pomocí kapesného pro Milku.

Dohromady dostali 410 Kč, tedy sestavím a vyřeším rovnici.



Milka m

Dominik $d = m + 100$

$$m + m + 100 = 410$$

$$2m = 310$$

$$m = 155$$

Metodický list k úloze Tělocvik

7. a 8. ročník

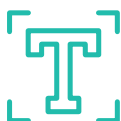
Téma: dělení na nestejně části, rovnice

Ve třídě je 28 žáků, kteří se na tělesnou výchovu dělí na tři skupiny. Při dnešní hodině střílí na koš dvakrát více žáků, než kolik žáků se věnuje šplhu, a o 2 žáky méně skáče přes bednu, než střílí na koš. Kolik žáků se věnuje jednotlivým činnostem?⁴¹

Úlohy POR16 (Kapesné), POR18 (Dárky), POR19 (Sourozenci), POR20 (Cyklovýlet) a POR34 (Utrácení) patří mezi slovní úlohy, v nichž se jedná o dělení celku na nestejně části. Ty se běžně řeší pomocí sestavení rovnice. Lze je však s úspěchem řešit i za pomoci obrázku, který údaje ze zadání a vztahy mezi nimi názorně ukazuje. Takový obrázek je současně i legendou („zápisem“) slovní úlohy. Před předložením řešení fiktivních žáků doporučujeme žáky vyzvat, aby si nějaký přehledný obrázek nakreslili. Ten mohou následně porovnat s námi navrhovaným znázorněním pomocí úsečkového diagramu. Pokud jejich vlastní obrázek nebude situaci ze zadání úlohy dostatečně vystihovat, jejich vlastní pokusy jim alespoň pomohou lépe pochopit obrázek fiktivního žáka.

Pro některé žáky může být řešení pomocí obrázku názornější. Pro všechny žáky je však přínosné, když si na základě porovnání námi nabízených strategií uvědomí, že způsob řešení je v obou případech stejný. V jednom případě jsou údaje a vztahy mezi nimi reprezentovány pomocí obrázků (úseček) a ve druhém případě symbolicky (rovnici). Mohou si tak i lépe představit význam písmene x jako neznámé.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Může nastat situace, kdy bude ve všech třech skupinách stejný počet žáků?
2. Je jasně řečeno, které sporty se v hodinách tělesné výchovy pěstují?
3. Je ze zadání zcela jasné, kolik je žáků ve třídě?
4. Přeformuluj druhé souvětí zadání tak, aby v jeho první části bylo použito slovo *méně* místo *více* a v jeho druhé části slovo *více* místo *méně*.

Rozvoj jazykové gramotnosti

5. Které slovo v zadání úlohy obsahuje více souhlásek než písmen?
6. V kterém sportu se střílí na koš?

⁴¹ Inspirace pro úlohu: Miťková, E. (2009.) *Rozvoj algebraického myšlení u žiakov základných a stredných škôl*. Disertační práce. Univerzita Komenského v Bratislavě.

Řešení

(1) Pokud jsou přítomni všichni žáci, kteří se dělí do skupin, tak nikoliv, pokud jeden žák chybí, potom ano (a následně i při dalších počtech dělitelných třemi). (2) Jasně to řečeno není, avšak text naznačuje, že se pěstují tři sporty: šplh, skok a košíková. (3) Není. Jasně je pouze to, že 28 žáků ze třídy se dělí do skupin. Hypoteticky ve třídě může být ještě např. 12 žáků, kteří se tělocviku neúčastní, nedělí se do skupin apod. Podobná zjednodušení jsou ve slovních úlohách častá. Vhodné k diskusi se žáky a k reformulaci: *Do 7.B chodí 28 žáků. Tito žáci se na hodiny tělesné výchovy dělí...* (4) Při dnešní hodině se věnuje šplhu dvakrát méně žáků, než střílí na koš, a o 2 žáky více střílí na koš, než skáče přes bednu. (5) Věnuje. (6) Košíková, basketbal.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Ottmar si počet žáků v každé skupině znázornil úsečkami tak, aby byly zřejmé vztahy mezi skupinami. Ze svého znázornění pak vyčetl „rovnici“, kterou však neformuloval pomocí neznámé, ale opět za pomoci obrázku.



Polana úlohu vyřešila pomocí sestavení rovnice. Za neznámou si zvolila počet žáků, kteří se věnují šplhu, protože počet žáků střílejících na koš je vyjádřen právě vzhledem k počtu žáků ve skupině šplh.

Znalost obou způsobů řešení je pro žáky užitečná. Nejde o to, aby byl jeden způsob prohlášen za lepší, ale o seznámení žáků s oběma způsoby. Příležitostí k řešení slovních úloh rovnicemi mají žáci zpravidla dost, naproti tomu učebnice obvykle nenabádají k řešení pomocí vizualizace.

Pracovní list k úloze Tělocvik



Ve třídě je 28 žáků, kteří se na tělesnou výchovu dělí na tři skupiny. Při dnešní hodině střílí na koš dvakrát více žáků, než kolik žáků se věnuje šplhu, a o 2 žáky méně skáče přes bednu, než střílí na koš. Kolik žáků se věnuje jednotlivým činnostem?

OTTMAR

Udělám si obrázek.
Na koš střílí dvakrát
tolik žáků, než kolik
jich šplhá.

Přeskoku se věnuje
o dva méně žáků,
než jich střílí na koš.
Celkem jich je 28.



5 krát |-----| mínus 2 dá 28

5 krát |-----| tedy bude 30

1 krát |-----| bude 6

Na koš střílí 12 žáků, šplhá 6
a přeskoku se věnuje 10.

POLANA

šplh x
koš $2 \cdot x$
přeskok $2 \cdot x - 2$

$$x + 2 \cdot x + (2 \cdot x - 2) = 28$$

$$5 \cdot x - 2 = 28$$

$$5 \cdot x = 30$$

$$x = 6$$

Za neznámou si
zvolím počet žáků,
kteří se věnují
šplhu. Pomocí ní
pak vyjádřím počty
žáků v dalších
dvou skupinách.
Dohromady to musí
dát 28 žáků.

Sestavím rovnici
a vyřeším ji.



Metodický list k úloze Dárky

7. a 8. ročník

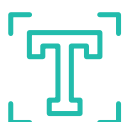
Téma: násobek, nejmenší společný násobek, rovnice

Ema nakoupila za 238 korun dárky mamce k narozeninám: kytici, čokoládu a papírové blahopřání. Za čokoládu zaplatila třikrát méně než za kytici a zároveň o 37 korun více než za blahopřání. Kolik korun stála čokoláda, kytice a blahopřání?⁴²

Úlohy POR16 (Kapesné), POR17 (Tělocvik), POR19 (Sourozenci), POR20 (Cyklovýlet) a POR34 (Utrácení) patří mezi slovní úlohy, v nichž se jedná o dělení celku na nestejně části. Ty se běžně řeší pomocí sestavení rovnice. Lze je však s úspěchem řešit i za pomoci obrázku, který údaje ze zadání a vztahy mezi nimi názorně ukazuje. Takový obrázek je současně i legendou („zápisem“) slovní úlohy. Před předložením řešení fiktivních žáků doporučujeme žáky vyzvat, aby si nějaký přehledný obrázek nakreslili. Ten mohou následně porovnat s námi navrhovaným znázorněním pomocí úsečkového diagramu. Pokud jejich vlastní obrázek nebude situaci ze zadání úlohy dostatečně vystihovat, jejich vlastní pokusy jim alespoň pomohou lépe pochopit obrázek fiktivního žáka.

Pro některé žáky může být řešení pomocí obrázku názornější. Pro všechny žáky je však přínosné, když si na základě porovnání námi nabízených strategií uvědomí, že způsob řešení je v obou případech stejný. V jednom případě jsou údaje a vztahy mezi nimi reprezentovány pomocí obrázků (úseček) a ve druhém případě symbolicky (rovnici). Mohou si tak i lépe představit význam písmene x jako neznámé.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Kolik korun stála čokoláda, kytice a blahopřání? Ptá se otázka na čokoládu, kytici a blahopřání zvlášť, anebo na všechny tři dárky dohromady?

2. Platí následující tvrzení? Nejlevnější bylo blahopřání, cenově uprostřed byla čokoláda a nejdražší byla kytice.

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Co můžeš říci o slově *mamka* z hlediska slohové příznakovosti? Použil/a bys je např. v životopisu nebo v motivačním dopise?

5. Kterým slovním druhem je slovo *blahopřání*? Uveď nějaké jeho synonymum.

⁴² Mitková, E. (2009.) *Rozvoj algebraického myslenia u žiakov základných a stredných škôl*. Disertační práce. Univerzita Komenského v Bratislavě.

3. Je důležité, v jakém pořadí Ema dárky nakoupila?

6. Jaký je původ slova *čokoláda*?

Řešení:

(1) Z otázky to není jasné, žáci by měli být vedeni k reformulaci. (2) Ano. (3) Z textového hlediska nikoliv, z věcného hlediska mohla kalkulovat, zda jí budou peníze stačit, aby podle toho volila pořadí nákupu. (4) Jedná se o slovo příznakové, expresivní; pro formální komunikaci je nevhodné. (5) Podstatné jméno, *gratulace*. (6) „Slovo dnes světové; pochází z jazyka mexických Indiánů (nápoj z kakaových bobů).“⁴³



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Irma použila k řešení úsečkový model. Za základ si vzala cenu čokolády a správně si uvědomila, že kytice bude třikrát dražší (bude tedy vyjádřena úsečkou trojnásobné délky) a blahopřání bude o 37 Kč levnější. To znázornila přerušovanou úsečkou. V tuto chvíli by mohla pokračovat sestavením rovnice, ale pokračuje úvahou. Z obrázku vidí, že celková cena 238 Kč sestává z pěti stejných cen reprezentovaných základní úsečkou (pro čokoládu) bez 37 Kč. Z toho už dopočítá cenu čokolády a následně kytice a blahopřání.

Lorenc řešil úlohu sestavením rovnice. Za základ si vzal cenu kytice a k ní vztahuje cenu čokolády a blahopřání. Výhodou je, že vztahy může sestavovat „zleva doprava“, tedy když je v zadání *třikrát méně*, správné je dělení. Irma si musela uvědomit, že v jejím způsobu řešení je tento termín v roli antisignálu a že si musí vztah přeformulovat na *kytice stojí třikrát více než čokoláda*. Nevýhodou řešení Lorence je, že mu vychází rovnice se zlomky, která může být pro některé žáky obtížná.

Znalost obou způsobů řešení je pro žáky užitečná. Nejde o to, aby byl jeden způsob prohlášen za lepší, ale o to, aby se s oběma žáci seznámili. Příležitostí k řešení slovních úloh rovnicemi mají žáci zpravidla dost, naproti tomu učebnice obvykle nenabádají k řešení pomocí vizualizace.

43 Machek, V. (2010, s. 106). *Etymologický slovník jazyka českého*. Nakl. Lidové noviny.

Pracovní list k úloze Dárky



Ema nakoupila za 238 korun dárky mamce k narozeninám: kytici, čokoládu a papírové blahopřání. Za čokoládu zaplatila třikrát méně než za kytici a zároveň o 37 korun více než za blahopřání. Kolik korun stála čokoláda, kytice a blahopřání?

IRMA

Udělám si obrázek. Všechny tři dárky vztáhnou k ceně za čokoládu.

Kytice byla třikrát dražší než čokoláda a blahopřání bylo o 37 korun levnější.

A dohromady to má dát 238 Kč.



5 krát ———— mínus 37 dá 238 Kč

5 krát ———— bude 275 Kč

1 krát ———— bude 55 Kč

LORENC

kytice x

čokoláda $x : 3$

blahopřání ... $x : 3 - 37$

Za neznámou si zvolím cenu kytice a pomocí ní pak vyjádřím cenu čokolády a blahopřání.

Dohromady to stálo 238 Kč, sestavím tedy rovnici a vyřeším ji.



$$x + x : 3 + (x : 3 - 37) = 238$$

$$\frac{5x}{3} - 37 = 238$$

$$\frac{5x}{3} = 275$$

$$x = 165$$

Kytice stála 165 Kč, čokoláda 55 Kč a blahopřání 18 Kč.

Metodický list k úloze Sourozenci

7. a 8. ročník

Téma: dělení na části, rovnice

Milan a Kristýna dostali od babičky balíček bonbónů. Milan hned balíček otevřel, několik bonbónů z něj dal sestře Kristýně a pro sebe si vzal dvakrát více, než dal sestře. Kristýně se samozřejmě takové rozdělení nelíbilo, vzala bratrovi balíček a zbylé bonbóny rozdělila tak, že k těm svým přidala 7 bonbónů a k Milanovým 2 bonbóny. Tak měli nakonec stejně. Kolik bonbónů si Milan vzal na začátku?⁴⁴

Úlohy POR16 (Kapesné), POR17 (Tělocvik), POR18 (Dárky), POR20 (Cyklovýlet) a POR34 (Utrácení) patří mezi slovní úlohy, v nichž se jedná o dělení celku na nestejně části. Ty se běžně řeší pomocí sestavení rovnice. Lze je však s úspěchem řešit i za pomoci obrázku, který údaje ze zadání a vztahy mezi nimi názorně ukazuje. Takový obrázek je současně i legendou („zápisem“) slovní úlohy. Před předložením řešení fiktivních žáků doporučujeme žáky vyzvat, aby si nějaký přehledný obrázek nakreslili. Ten mohou následně porovnat s námi navrhovaným znázorněním pomocí úsečkového diagramu. Pokud jejich vlastní obrázek nebude situaci ze zadání úlohy dostatečně vystihovat, jejich vlastní pokusy jim alespoň pomohou lépe pochopit obrázek fiktivního žáka.

Pro některé žáky může být řešení pomocí obrázku názornější. Pro všechny žáky je však přínosné, když si na základě porovnání námi nabízených strategií uvědomí, že způsob řešení je v obou případech stejný. V jednom případě jsou údaje a vztahy mezi nimi reprezentovány pomocí obrázků (úseček) a ve druhém případě symbolicky (rovnici). Mohou si tak i lépe představit význam písmene x jako neznámé.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Můžeme uvažovat o variantě, že Milan dal po otevření balíčku Kristýně jen jeden bonbón?



Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Představ si rozhovor mezi Milanem a Kristýnou a запиš jej. Použij věty uvozovací i přímou řeč. Soutězte, kdo vylíčí konflikt mezi Milanem a Kristýnou nejpoutavěji. Dbejte na správnou interpunkci.

⁴⁴ Miťková, E. (2009.) *Rozvoj algebraického myslenia u žiakov základných a stredných škôl*. Disertační práce. Univerzita Komenského v Bratislavě.

2. Je pravda, že Kristýna musela mít na začátku o pět bonbónů méně než Milan?

5. a) Vysvětli pravopis tvaru slova *bratrovi*.
b) Přeformuluj větný celek tak, aby význam zůstal stejný, ale tvar slova byl *bratrovy*.

3. Pokus se nakreslit, jak vypadala situace s počty bonbónů poté, co je rozdělil Milan, a poté, co je rozdělila Kristýna.

6. Přidej do první věty ke tvaru slova *bonbónů* vhodný přívlástek. Je tento přívlástek nutný k vyřešení úlohy?

Řešení

(1) Ne, ve slovní úloze je jasně řečeno *několik bonbónů*. (2) Ano, je to rozdíl $7 - 2$ (7 bonbónů dala Kristýna sobě a 2 dala Milanovi, aby měli na konci stejně). (3) Otevřená úloha. (4) Kreativní cvičení, nácvik vyprávěcího slohového postupu a procvičování interpunkce přímé řeči. Příklad:

„Milane, koukej, dostali jsme od babičky bonbóny,“ přiběhla za bratrem Kristýna.

Milanovi zasvítily oči: „Dej to sem, já to otevřu, stejně na to nemáš sílu.“

„Ale ne že mi to zase všechno sníš,“ podala Kristýna s obavami sáček Milanovi.

„Prosím tě,“ zatvářil se Milan pohoršeně, „co si o mně myslíš! Tumaš!“

„Tak moment,“ vyhrkla Kristýna, „takhle je to pěkně nespravedlivé. Z toho zbytku si já ještě vezmu sedm bonbónů, ty dostaneš dva, a pak teprve budeme mít oba stejně.“

(5) a) Jedná se substantivum: „Mužská životná podstatná jména skloňovaná podle vzorů „pán“, „muž“ a „soudce“ mají ve 3. a 6. p. j. č. koncovky *-u/-ovi* (vzor „pán“) a *-i/-ovi* (vzory „muž“ a „soudce“).“⁴⁵; b) Kristýně se samozřejmě takové rozdělení nelíbilo, vzala si bratrovy sladkosti a zbylé bonbóny rozdělila tak, že k těm svým přidala 7 bonbónů a k Milanovým 2 bonbóny. (6) Čokoládových, ovocných, žvýkacích, tvrdých...; není.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Obě předložená řešení jsou správná. Tristan si situaci přehledně nakreslil, a díky tomu nemusel vlastně nic počítat – ihned z obrázku bylo jasné, že výsledek je 5. Izolda si postavila na základě vztahů v úloze jednoduchou lineární rovnici a tu vyřešila.



Znalost obou způsobů řešení je pro žáky užitečná. Nejde o to, aby byl jeden způsob prohlášen za lepší, ale o seznámení žáků s oběma variantami. Příležitostí k řešení slovních úloh rovnicemi mají žáci zpravidla dost, naproti tomu učebnice obvykle nenabádají k řešení pomocí vizualizace.

⁴⁵ Internetová jazyková příručka (<https://prirucka.ujc.cas.cz/?id=224>).

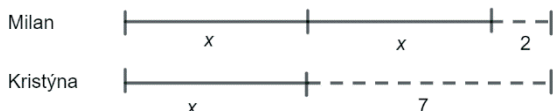
Pracovní list k úloze Sourozenci



Milan a Kristýna dostali od babičky balíček bonbónů. Milan hned balíček otevřel, několik bonbónů z něj dal sestře Kristýně a pro sebe si vzal dvakrát více, než dal sestře. Kristýně se samozřejmě takové rozdělení nelíbilo, vzala bratrovi balíček a zbylé bonbóny rozdělila tak, že k těm svým přidala 7 bonbónů a k Milanovým 2 bonbóny. Tak měli nakonec stejně. Kolik bonbónů si Milan vzal na začátku?

TRISTAN

Tu situaci si nejdříve nakreslím, protože se mi zdá komplikovaná. Ten neznámý počet bonbónů si označím x . To, co rozdala Kristýna, si označím přerušovaně.



A z toho obrázku hned vidím, že ten neznámý počet musí být 5, protože 5 plus 2 je sedm.

IZOLDA

Ten neznámý počet bonbónů, které dal na začátku Milan Kristýně a dvakrát sobě, si označím x .

Pak k tomu přidám to, co rozdala Kristýna.

Nakonec měli stejně, tedy oba počty se musí rovnat. Dostanu jednoduchou rovnici a tu vyřeším.



Kristýně dal x
 Sobě nechal $2x$
 Kristýna přidala sobě 7
 Kristýna přidala Milanovi 2

Pak měli stejně:

$$2x + 2 = x + 7$$

$$x = 5$$

Milan si na začátku vzal 5 bonbónů.

Metodický list k úloze Cyklovýlet

7. a 8. ročník

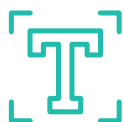
Téma: rovnice, dělení celku na části

Dušan se o prázdninách vydal na cyklistický výlet, během něhož se zastavil, aby si prohlédl jeskyni. Když si večer plánoval program na další den, vzpomínal na své výdaje. Vstupenka do jeskyně ho stála dvakrát více než suvenýry. Za jídlo utratil o 50 korun méně než za vstupenku. Po přepočítání zjistil, že dohromady utratil 300 korun. Kolik stála vstupenka, suvenýry a jídlo?⁴⁶

Úlohy POR16 (Kapesné), POR17 (Tělocvik), POR18 (Dárky), POR19 (Sourozenci) a POR34 (Utrácení) patří mezi slovní úlohy, v nichž se jedná o dělení celku na nestejně části. Ty se běžně řeší pomocí sestavení rovnice. Lze je však s úspěchem řešit i za pomoci obrázku, který údaje ze zadání a vztahy mezi nimi názorně ukazuje. Takový obrázek je současně i legendou („zápisem“) slovní úlohy. Před předložením řešení fiktivních žáků doporučujeme žáky vyzvat, aby si nějaký přehledný obrázek nakreslili. Ten mohou následně porovnat s námi navrhovaným znázorněním pomocí úsečkového diagramu. Pokud jejich vlastní obrázek nebude situaci ze zadání úlohy dostatečně vystihovat, jejich vlastní pokusy jim alespoň pomohou lépe pochopit obrázek fiktivního žáka.

Pro některé žáky může být řešení pomocí obrázku názornější. Pro všechny žáky je však přínosné, když si na základě porovnání námi nabízených strategií uvědomí, že způsob řešení je v obou případech stejný. V jednom případě jsou údaje a vztahy mezi nimi reprezentovány pomocí obrázků (úseček) a ve druhém případě symbolicky (rovnici). Mohou si tak i lépe představit význam písmene x jako neznámé.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Přeformuluj text tak, aby neobsahoval informace, které **nepotřebuješ** vědět k vyřešení úlohy.

2. *Kolik stála vstupenka, suvenýry a jídlo?* Ptá se otázka na vstupenku, suvenýry a jídlo zvlášť, anebo na všechny tři věci dohromady?

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. První vedlejší věta je stylisticky nevhodná. Přijdeš na to, v čem je problém, případně dokážeš souvětí přeformulovat?

5. Převeď souvětí na větu jednoduchou: *Když si večer plánoval program na další den, vzpomínal na své výdaje.*

⁴⁶ Mitková, E. (2009.) *Rozvoj algebraického myšlení u žáků základních a středních škôl*. Disertační práce. Univerzita Komenského v Bratislavě.

3. Platí následující popis situace? *Nejlevnější jsou suvenýry, cenově uprostřed bylo jídlo a nejdražší byla vstupenka do jeskyně.*

6. Jaký je druh vedlejší věty v posledním souvětí? Je příslovce v této větě možno nahradit nějakými synonymy, aby se nezměnil smysl slovní úlohy? Nabídka: *společně, celkem, vcelku, úhrnem.*

Řešení

(1) Dušan si přepočítával, kolik utratil. Vstupenka do jeskyně ho stála dvakrát více než suvenýry. Za jídlo utratil o 50 korun méně než za vstupenku. Dohromady tak utratil 300 korun. Kolik stála vstupenka, suvenýry a jídlo? (2) Z otázky to není jasné, žáci by měli být vedeni k reformulaci. (3) Ano, ale s jistotou to budeme vědět až po výpočtu. (4) Jedná se o tzv. nepravou větu vedlejší přívlastkovou: „Jako nepravé věty vedlejší označujeme ve shodě s mluvnicemi a syntaktickými pracemi takové vedlejší věty, které svůj řídicí člen (obsažený ve větě hlavní) nijak nedeterminují (neurčují jeho vlastnost ani nezužují jeho význam), ale vyjadřují samostatný děj/stav, popř. slouží k prostému navázání děje. Je u nich patrný rozpor mezi formou a obsahem. Formálně to jsou věty vedlejší, neboť jsou uvozeny prostředky podřadicími (vztažnými výrazy nebo spojkami), obsahově však mají charakter vět hlavních.“⁴⁷ Stylisticky vhodnější formulace: *Dušan se o prázdninách vydal na cyklotúru. Během cesty se zastavil, aby si prohlédl jeskyni...* (5) Při večerním plánování programu na další den si vzpomínal na své výdaje. (6) Předmětná; společně (ne); celkem (ano), vcelku (s výhradou, má i význam v podstatě, přibližně...); úhrnem (ano).



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Obě řešení jsou správná. Ottmar vyřešil úlohu za pomoci úsečkového diagramu. Ten mu umožnil dobrý vhled do aktérů úlohy (cena za suvenýry, vstupenku a jídlo) a zejména do vztahů mezi nimi. Z obrázku pak jednoduše sestavil rovnici.



Polana zvolila čistě algebraické řešení – jednotlivé neznámé si označila písmeny a správně vyjádřila vztahy mezi nimi. Obtížnější bylo vyjádření ceny za jídlo, protože to je v zadání vyjádřeno pomocí ceny za vstupenku, ale pro sestavení rovnice je třeba ji vyjádřit pomocí ceny za suvenýry. Polana tedy musela dosadit za proměnnou v výraz 2s. (Ottmarovi pomohl tento obtížný krok překonat názorný diagram.)

Znalost obou způsobů řešení je pro žáky užitečná. Nejde o to, aby byl jeden způsob prohlášen za lepší, ale o seznámení žáků s oběma variantami. Příležitost k řešení slovních úloh rovnicemi mají žáci zpravidla dost, naproti tomu učebnice obvykle nenabádají k řešení pomocí vizualizace.

⁴⁷ Internetová jazyková příručka (<http://nase-rec.ujc.cas.cz/archiv.php?art=7967>).

Pracovní list k úloze Cyklovýlet



Dušan se o prázdninách vydal na cyklistický výlet, během něhož se zastavil, aby si prohlédl jeskyni. Když si večer plánoval program na další den, vzpomínal na své výdaje. Vstupenka do jeskyně ho stála dvakrát více než suvenýry. Za jídlo utratil o 50 korun méně než za vstupenku. Po přepočítání zjistil, že dohromady utratil 300 korun. Kolik stála vstupenka, suvenýry a jídlo?

OTTMAR

Udělám si obrázek. Cenu za suvenýry si znázorním úsečkou. Cenu vstupenky znázorním úsečkou dvojnásobné délky.

Pak si doplním úsečku pro cenu jídla – ta bude kratší než úsečka pro vstupenku. Ten rozdíl činí 50 Kč.

Obrázek mi napoví, jak sestavit rovnici.



$$s + (s + s) + (s + s - 50) = 300$$

$$5s - 50 = 300$$

$$5s = 350$$

$$s = 70$$

POLANA

Označím si nejdříve všechny tři neznámé a podle zadání si vyjádřím, jaké jsou mezi nimi vztahy.

Cenu za jídlo mám vyjádřenou pomocí ceny za vstupenky, ale potřebuji ji vyjádřit pomocí ceny za suvenýry. Proto musím za v dosadit $2s$.

Pak už mohu sestavit a vyřešit rovnici.



suvenýry..... s
 vstupenka $v = 2s$
 jídlo..... $j = v - 50 = 2s - 50$

$$s + v + j = 300$$

$$s + 2s + 2s - 50 = 300$$

$$5s - 50 = 300$$

$$5s = 350$$

$$s = 70$$

Suvenýry stály 70 Kč,
vstupenka 140 Kč a jídlo 90 Kč.

Metodický list k úloze Irena

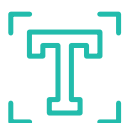
7. až 9. ročník

Téma: zlomky, příp. rovnice

Irena řeší test. Během prvního čtení vyřešila tři čtvrtiny všech otázek, při kontrole pak ještě další šestinu. Dohromady tak vyřešila 22 otázek. Z kolika otázek se skládá celý test?⁴⁸

Tato slovní úloha je typickou úlohou vyznačující se znaky nedorečenosti a neexplicitnosti. Nejednoznačná formulace souvětí připouští dvojí výklad úlohy. S oporou o matematický diskurz předpokládáme, že Irena při kontrole vyřešila ještě další šestinu všech otázek z testu. Explicitně řečeno to ovšem není. Jedním z cílů (nejen) jazykové výchovy je rozvoj komunikační kompetence včetně schopnosti srozumitelné, výstižné a přesné výstavby jazykového projevu, učitelé tedy mohou na tento případ poukázat a spolu s žáky text úlohy přeformulovat tak, aby byl jednoznačný.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Je ti text jasný? Je text jednoznačný?

2. Pokud se domníváš, že úloha v některé ze svých částí není zcela přesná, přeformuluj tuto část svými slovy.

3. Do úseku textu *při kontrole pak ještě další šestinu* lze beze změny smyslu slovesa z předchozí věty nejspíš doplnit sloveso:

- a) dořešila
- b) vyluštila
- c) objasnila
- d) posoudila

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Najdi slovesa v přítomném čase. Jak se změní děj úlohy, pokud je převedeš do času minulého?

5. a) Kterým slovním druhem je slovo *čtení*?
b) Převed' na stejný slovní druh sloveso v první větě a vytvoř s ním větu.

6. Nyní postupuj obráceně a slovo *čtení* převed' na sloveso tak, aby zůstal zachován smysl věty *Během prvního čtení vyřešila tři čtvrtiny všech otázek*. Co se s větou stalo?

⁴⁸ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvát, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 171). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.

Řešení

(1) a) Pokud žáci sami neupozorní na nejednoznačnost věty, zeptáme se jich, zda z textu slovní úlohy jednoznačně vyplývá následující informace: *Irena při kontrole vyřešila šestinu všech otázek.* (2) ... *další šestinu ze všech...* (3) a) (O významech slov lze diskutovat.) (4) *Řeší, skládá se;* po převedení do minulého času je celý děj situován do minulosti. (5) a) Podstatné jméno, b) řešení (verbální substantivum – termín pro učitele; procvičuje se stylisticky důležité a obtížné učivo o větném a nevětném vyjádření); např. *Irena dospěla ke správnému řešení slovní úlohy* – lze znovu transformovat, např. *Irena správně vyřešila slovní úlohu*, možná diskuse o významovém posunu; srov. při zachování přítomného času stylisticky nevhodné *Irena *provádí řešení* – transformační a stylizační cvičení. (6) *Když test četla poprvé, vyřešila tři čtvrtiny všech otázek* – vzniklo souvětí, s žáky lze diskutovat, které z vyjádření (větné versus nevětné) je názornější.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Předkládáme dvě dvojice řešení, všechna jsou správná.



První dvojici řešení lze využít od 7. ročníku, kdy se žáci blíže setkávají se zlomky. Obě využívají schéma, které poskytuje dobrý vhled do matematického modelu úlohy. Teta dokázala vyčíst řešení přímo ze svého úsečkového modelu. Kazi nejdříve provedla výpočet (součet zlomků) a schéma využila pro zjištění, kolik otázek přísluší jedné dvanáctině testu.

Druhou dvojici doporučujeme zařadit až tehdy, když se žáci seznámí s lineárními rovnicemi. Tu ve svém řešení využil Bivoj.

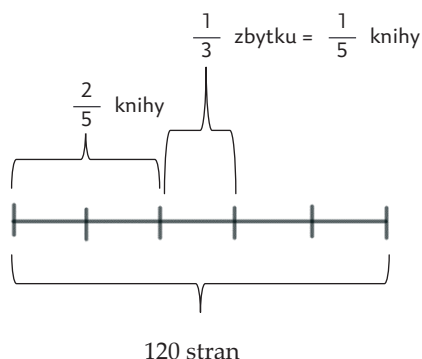


Návazná práce

Žákům můžeme předložit úlohu(y), v jejímž (jejichž) řešení je výhodné použít podobné schéma (úsečkový diagram), a požádat je právě o takový způsob řešení. Jednu takovou úlohu uvedeme.



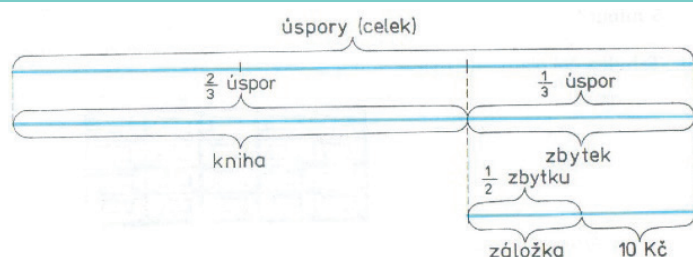
Petr čte knihu, která má 120 stran. První den přečetl dvě pětiny knihy a druhý den jednu třetinu zbytku. Kolik stran mu ještě zbývá dočíst?



Z náčrtu je patrné, že zbývá dočíst dvě pětiny stran knihy, tedy 48 stran.

Další vhodné úlohy na použití úsečkového modelu je možné nalézt v učebnicích. Uvedeme úlohu z učebnice pro osmiletá gymnázia, v níž autoři řešení právě pomocí tohoto modelu představují.⁴⁹ To se však v učebnicích u slovních úloh objevuje jen zřídka.

Mirek se rozhodl koupit za uspořené peníze dárky k narozeninám pro svou sestru. Nejprve jí koupil knihu, za kterou zaplatil $\frac{2}{3}$ svých úspor. Za polovinu zbytku pak koupil do knihy záložku a ještě mu zbylo 10 Kč na karafiát. Kolik korun měl Mirek na nákup dárků?



Protože 10 Kč je polovina třetiny úspor, je celá třetina úspor rovna $2 \cdot 10 \text{ Kč} = 20 \text{ Kč}$. Proto je celek roven $3 \cdot 20 \text{ Kč} = 60 \text{ Kč}$. Mirek měl tedy na nákup dárků uspořeno 60 Kč.

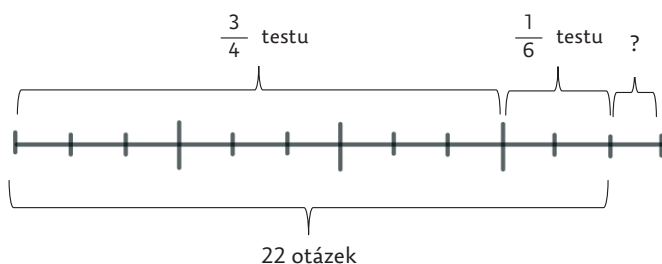
⁴⁹ Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (1994, s. 17 a 18). *Matematika: Racionální čísla. Procenta*. Prometheus.

Pracovní list 1 k úloze Irena



Irena řeší test. Během prvního čtení vyřešila tři čtvrtiny všech otázek, při kontrole pak ještě další šestinu. Dohromady tak vyřešila 22 otázek. Z kolika otázek se skládá celý test?

TETA



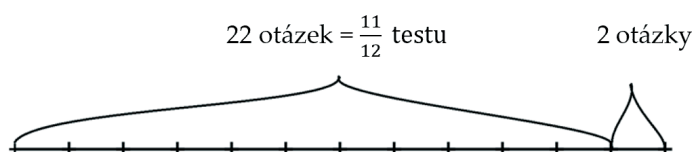
Stačí, když si nakreslím obrázek. Potřebuji takový, kde dokážu znázornit čtvrtinu a šestinu. Tak si úsečku rozdělím na 12 částí.

Z obrázku už pěkně vidím, že Irena nedořešila jednu dvanáctinu testu a že jeden dílek jsou 2 otázky.

Celý test měl 24 otázek.

KAZI

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9+2}{12} = \frac{11}{12}$$



Sečtu tři čtvrtiny a jednu šestinu. Vyjde jedenáct dvanáctin.

Těchto jedenáct dvanáctin testu odpovídá 22 otázkám.

Nakreslím si obrázek.

Z něho vidím, že 2 otázky jsou jedna dvanáctina testu.

Celý test má 24 otázek.

Pracovní list 2 k úloze Irena



Irena řeší test. Během prvního čtení vyřešila tři čtvrtiny všech otázek, při kontrole pak ještě další šestinu. Dohromady tak vyřešila 22 otázek. Z kolika otázek se skládá celý test?

KAZI

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9+2}{12} = \frac{11}{12}$$

22 otázek = $\frac{11}{12}$ testu

2 otázky



Sečtu tři čtvrtiny a jednu šestinu. Vyjde jedenáct dvanáctin.

Těchto jedenáct dvanáctin testu odpovídá 22 otázkám.

Nakreslím si obrázek.

Z něho vidím, že 2 otázky jsou jedna dvanáctina testu.

Celý test má 24 otázek.

BIVJOJ

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x + \frac{1}{6}x &= 22 \quad | \cdot 12 \\ 12 \cdot \frac{3}{4}x + 12 \cdot \frac{1}{6}x &= 22 \cdot 12 \\ 9x + 2x &= 264 \\ 11x &= 264 \quad | : 11 \\ x &= 24 \end{aligned}$$



Počet všech otázek v testu si označím neznámou x .

Sestavím rovnici podle zadání úlohy.

Abych se zbavil zlomků, vynásobím obě strany rovnice číslem 12.

Jako řešení úlohy dostávám 24. Test se skládá z 24 otázek.

Metodický list k úloze Houby

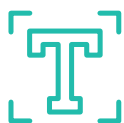
7. až 9. ročník

Téma: procenta, zlomky, desetinná čísla

Rodina Novotných si v sobotu ráno přivstala a vyrazila na houby do nedalekého lesa. Děti sbíraly společně do košíku o objemu pět litrů, rodiče společně do košíku o objemu tři litry. Dětem se podařilo naplnit 80 % košíku, rodičům 60 %. Po cestě domů potkali houbaře, který se jim pochlubil, že se mu podařilo naplnit tři čtvrtiny velkého košíku o objemu osm litrů. Kdo nasbíral větší množství hub? Rodina Novotných, nebo houbař?⁵⁰

Tato slovní úloha o společné práci vyžaduje dobré porozumění procentům a jejich vyjádřením pomocí desetinných čísel a zlomků. Je komplikována tím, že u Novotných musí žáci pracovat s dvěma košíky. Nabízíme dva způsoby řešení, z nichž jedno porovnává, kolik procent košíku (v případě Novotných jde o pomyslný společný košík) naplnil houbař a kolik Novotní. Ve druhém řešení jsou vyjádřeny přímo litry nasbíraných hub.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1.
 - a) Kolik košíků je v úloze zmíněno?
 - b) Kdo měl největší košík? Děti Novotných, rodiče Novotní, nebo houbař, kterého Novotní potkali?

2. Bez počítání: Kdo nasbíral větší množství hub? Děti Novotných, nebo rodiče Novotní?

3. Je pravda, že rodiče Novotní měli dvě děti?

4. Zapiš tři čtvrtiny číslicí. Kolik je to procent?

Rozvoj jazykové gramotnosti

5. Kolik vět obsahuje souvětí *Po cestě domů potkali houbaře, který se jim pochlubil, že se mu podařilo naplnit tři čtvrtiny velkého košíku o objemu osm litrů*? Podtrhni slova, podle kterých to poznáš.

6. Myslím si slovo. Je to slovo příbuzné se slovem *houby* a je to podstatné jméno středního rodu, vzor *stavení*. Jaké slovo si myslím?

⁵⁰ Úloha a řešení fiktivních žáků viz práce (Kohout, O. [2021, s. 43.] *Porovnávání strategií při řešení typových slovních úloh*. Bakalářská práce. PedF UK).

Řešení

(1) a) 3, b) houbař. (2) Děti – jednak měly větší košík, jednak do tohoto většího košíku nasbíraly procentuálně více hub než jejich rodiče. (3) Nevíme, v textu úlohy se o tom nemluví (a pro řešení úlohy to není potřeba). (4) $\frac{3}{4}$, 75 %. (5) Tři věty, počet vět se pozná podle počtu přísudků (sloves v určitém tvaru): *potkali, se pochlubil, se podařilo*. (6) *Podhoubí, houbaření*.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Kazi si udělala tabulku, která jí umožnila přehledně znázornit údaje ze zadání a sestavit výpočet pro zjištění, jakou část pomyslného společného košíku naplnila rodina Novotných. Následně vyjádřila v procentech, jakou část košíku naplnil houbař. Kazi si procenta vyjádřila pomocí desetinných čísel. Žáci si tedy musí uvědomit, že např. 80 % z čísla je 0,8násobek tohoto čísla.



Bivoj počítal přímo s litry hub. Zjistil, kolik litrů hub nasbíral houbař a kolik dohromady rodina Novotných. Žáci si musí uvědomit souvislost procent a zlomků, např. že 80 % z čísla jsou $\frac{4}{5}$ z tohoto čísla.

Žákům můžeme položit doplňkovou otázku, kolik procent svého košíku by musely děti naplnit, aby měly spolu s rodiči stejně hub jako houbař. [85 %.]

Pracovní list k úloze Houby



Rodina Novotných si v sobotu ráno přivstala a vyrazila na houby do nedalekého lesa. Děti sbíraly společně do košíku o objemu pět litrů, rodiče dohromady do košíku o objemu tři litry. Dětem se podařilo naplnit 80 % košíku, rodičům 60 %. Po cestě domů potkali houbaře, který se jim pochlubil, že se mu podařilo naplnit tři čtvrtiny velkého košíku o objemu osm litrů. Kdo nasbíral větší množství hub? Rodina Novotných, nebo houbař?

KAZI

Udělám si tabulku, abych to všechno měla přehledně před sebou. Napíšu do ní objemy košíků a podíly hub. V posledním sloupečku vypočítám, kolik litrů hub bylo v jednotlivých koších.



košík	objem	naplněná část košíku	objem hub v košíku v litrech
děti	5 litrů	0,8	$5 \cdot 0,8 = 4$
rodiče	3 litry	0,6	$3 \cdot 0,6 = 1,8$
společně	8 litrů	x	$4 + 1,8 = 5,8$

Novotní:

$$\frac{5,8}{8} = 0,725, \text{ tedy } 72,5 \%$$

Houbař:

$$\frac{3}{4} = 0,75, \text{ tedy } 75 \%$$

Košíky Novotných mají dohromady stejný objem jako houbařův košík.

Určím, jakou část by tvořilo 5,8 litrů hub v osmilitrovém košíku.

U houbaře tvoří houby tři čtvrtiny košíku. Houbař nasbíral více.



Houbař nasbíral více hub než rodina Novotných.

BIVVOJ

Košík houbaře má stejný objem jako oba košíky Novotných.

Určím, jaké množství hub nasbíral houbař a kolik Novotní.



Houbař houby:

$$8 : 4 = 2 \rightarrow 2 \cdot 3 = 6$$

Děti houby:

$$80 \% \dots \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$$

$$5 : 5 = 1 \rightarrow 1 \cdot 4 = 4$$

Rodiče houby:

$$60 \% \dots \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

$$3 : 5 = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5}$$

Novotní:

$$4 + \frac{9}{5} = \frac{20 + 9}{5} = \frac{29}{5}$$

$$\frac{29}{5} < 6$$

Houbař naplnil tři čtvrtiny košíku, má tedy 6 litrů hub.

Děti naplnily 80 % košíku, což jsou čtyři pětiny košíku. Tedy celkem naplnily houbami 4 litry z pěti.

U rodičů to udělám stejně.

Sečtu, co nasbírali rodiče i děti.

Vidím, že houbař nasbíral více hub.



Metodický list k úloze Benjamin

7. až 9. ročník

Téma: neznámé jednotky, rovnice

Benjamin sbírá jen mince v hodnotě 5 zedů, Nikolas jen v hodnotě 2 zedů. Nikolas má o 10 mincí více, ale přitom o 40 zedů méně. Kolik zedů má Benjamin?⁵¹

Úloha je komplikována použitím hypotetické měny, která se běžně používá např. v mezinárodních srovnávacích výzkumech PISA a TIMSS. Žáci se učí pracovat s neznámými jednotkami (zedy), a získávají tím hlubší vhled do rozdílu mezi počtem (mincí) a peněžní hodnotou. Do jisté míry tak zobecňují své zkušenosti, které mají s českou měnou či případně s eury. Jde o to, aby si uvědomili, že nezáleží na názvu měny, ale jen na hodnotách mincí. Jen 27 % žáků 9. ročníku v našem výzkumu dokázalo úlohu úspěšně vyřešit.⁵² Problém byl v sestavení rovnice, ale také v tom, že se žáci nepokusili získat do situace vhled pomocí několika číselných příkladů. Ty by mohly usnadnit tvorbu rovnice nebo by si žáci uvědomili, že mohou řešit úlohu i systematickým zkoumáním jednotlivých případů.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Jak si představuješ zedy? Nakresli mince, které sbírá Benjamin, a mince, které sbírá Nikolas.

2. Věty v úloze se v tiskárně přeházely. Zkus vymyslet bez počítání: bude výsledek stejný, nebo jiný? *Nikolas sbírá jen mince v hodnotě 2 zedů, Benjamin jen v hodnotě 5 zedů. Nikolas má o 40 zedů méně, ale přitom o 10 mincí více. Kolik zedů má Benjamin?*

3. Zkus několik konkrétních příkladů počtu mincí Benjamin a počtu mincí Nikolase tak, aby se tento počet lišil o 10. O kolik se budou lišit sumy peněz obou chlapců? Uspořádej své pokusy do přehledné tabulky.

Rozvoj jazykové gramotnosti

5. Jaký název by úloha mohla mít?
a) Sbíráání bankovek, b) 7 zedů, c) Sběratelé

6. Obsahuje text slovní úlohy nějaká přídavná jména? Je skutečnost, kterou jsi zjistil/a, na překážku při řešení slovní úlohy? Dokážeš vysvětlit proč?

7. Jaká je česká verze jména Nikolas?

8. Napiš název společné měny, kterou se platí ve státech Evropské unie, pravopisně správně. Zjisti, jaký je kurz vůči české koruně.

⁵¹ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 186). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.

⁵² Vondrová et al., 2019, s. 185.

4. U úkolu 3 jsi zapsal/a několik výpočtů. Dokážeš je napsat obecněji?

9. Doplň vhodnou spojku za první čárku textu.

Řešení:

(1) Úkol by mohl vést k tomu, že si žáci uvědomí analogii s korunami a současně si více uvědomí rozdíl mezi počtem mincí a jejich hodnotou. (2) Čtení s porozuměním: informace zůstaly stejné, došlo pouze ke změnám ve větosledu. (3+4) Jedna z možných tabulek je níže; žáci by si měli současně uvědomovat, jak lze k číslu v posledním sloupci dospět konkrétními výpočty, aby mohli provést zobecnění: $2 \cdot 5 - 12 \cdot 2 = -14$, $10 \cdot 5 - 20 \cdot 2 = 10$, ... $x \cdot 5 - y \cdot 2 =$, případně $x \cdot 5 - (10 - x) \cdot 2 =$. (5) Čtení s porozuměním: bankovky lze vyloučit, odpověď 7 zedů by signalizovala povrchové čtení, správně je tedy c). (6) Ne; na rozdíl od např. úlohy Vleky I (starý a nový vlek) není přívlastek podstatný pro vyřešení úlohy; může ji ovšem obsahově obohatit. (7) Mikuláš; práce se zdroji a vyhledávání v nich; žákům můžeme dát nápoředu, aby se podívali do kalendáře na den 6. prosince. (8) euro (malé písmeno na začátku slova). (9) Od jednoduchých souřadících spojek (a) diskusí se žáky dospíváme k myšlenkově náročnějším, např. zatímco, kdežto. Rozvíjení slovní zásoby a myšlení třibením spojovacích výrazů, rozvoj stylizačních dovedností, významové vztahy mezi syntaktickými jednotkami. Dle úrovně třídy lze využít jako cvičení s výběrem z možností.

Ben počet / hodnota	Nik počet / hodnota	rozdíl „Ben mínus Nik“
2 / 10	12 / 24	- 14
10 / 50	20 / 40	10



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Pracovní list obsahuje dvě správné strategie. Obě využívají tabulku, i když každá vede k jiné rovnici. Žáci by měli pochopit, jak obě rovnice vznikly. Je možné např. položit otázku, proč má v Hedině postupu Nikolas $2(x + 10)$ zedů.



Manon měla potřebu pracovat s jednotkami, které zná. Mohla by jednoduše zaměnit zedy za koruny, ale zkušenost s výměnou peněz u zahraničních měn ji zřejmě vede ke stanovení nějakého kurzu mezi zedem a korunou. Pochopení jejího řešení žákům komplikuje i to, že Manon Nikolasovi rozdíl mincí mezi chlapci „vezme“. Tato úvaha je správná.

Heda dokázala pracovat s neznámou měnou. Uvědomila si, že na její hodnotě vůči koruně nezáleží.

Pracovní list k úloze Benjamin (první část)



Benjamin sbírá jen mince v hodnotě 5 zedů, Nikolas jen v hodnotě 2 zedů. Nikolas má o 10 mincí více, ale přitom o 40 zedů méně. Kolik zedů má Benjamin?

MANON

Se zedy počítat neumím, a proto si udělám vlastní převod zedů na koruny.

Jeden zed bude mít hodnotu 10 korun. Poté vše zase přepočítám zpátky z korun na zedy.



1 zed = 10 korun
2 zedy = 20 korun
5 zedů = 50 korun

Přeformuluji zadání:

Benjamin sbírá jen mince v hodnotě 50 korun, Nikolas jen v hodnotě 20 korun. Nikolas má o 10 mincí více, ale přitom o 400 korun méně. Kolik korun má Benjamin?

Teď si vytvořím tabulku, která mi ukazuje, kolik korun by měl Benjamin a Nikolas, kdyby měli stejný počet mincí.

	počet mincí	počet korun
Benjamin	x	50x
Nicholas	x	20x

HEDA

O zedech jsem sice ještě neslyšela, ale snad nebude takový problém s nimi počítat. Přece nepotřebuji vědět, kolik je jeden zed, když po mně nikdo v zadání nechce, abych zedy převáděla na jinou měnu.



1 zed = 1 zed

A teď si vytvořím přehlednou tabulku ze zadání úlohy.

Neznámý počet mincí, které má Benjamin, označím x.

Má-li Benjamin x mincí v hodnotě 5 zedů, pak má celkem 5x zedů.

	počet mincí	počet zedů
Benjamin	x	5x
Nicholas	x + 10	2(x + 10)

Pracovní list k úloze Benjamin (druhá část)



MANON

Nikolas má sice o 10 mincí více než Benjamin, zato má ale o 400 korun méně.

Něco zkusím. Nikolasovi těch 10 mincí vezmu. Pak budou mít stejný počet mincí.

Tedy Nikolasovi odečtu 10 (počet mincí) krát 20 Kč (hodnota jedné mince), což je 200 Kč.



$$20x = 50x - 400 - 200$$

$$20x = 50x - 600$$

$$0 = 30x - 600$$

$$600 = 30x$$

$$x = 20$$



$$50x = 50 \cdot 20 = 1\,000$$

$$1\,000 \text{ korun} = 100 \text{ zedů}$$

Nesmím zapomenout převést koruny na zedy.

Benjamin má 100 zedů.

HEDA

Ze zadání vím, že Nikolas má o 40 zedů méně než Benjamin.

Sestavím rovnici a vyřeším ji.



$$2(x + 10) = 5x - 40$$

Nejdříve roznásobím závorku na levé straně. Poté upravím rovnici tak, aby byla neznámá na jedné straně a čísla na druhé.

Dostávám, že Benjamin má 20 mincí.

$$2x + 20 = 5x - 40$$

$$20 = 3x - 40$$

$$60 = 3x$$

$$x = 20$$



$$5x = 5 \cdot 20 = 100$$

Výsledek mám rovnou v zedech.

Benjamin má 100 zedů.

Metodický list k úloze Slitina

7. až 9. ročník

Téma: poměr, přímá úměrnost

Slitina je vyrobena ze zlata a stříbra tak, že na každý 1 gram zlata připadají 4 gramy stříbra. Kolik gramů stříbra je ve 40 gramech této slitiny?⁵³

Úloha vyžaduje pochopení poměru, přičemž poměr je popsán formou *na 1 g zlata připadají 4 g stříbra*. Žáci tedy musí v první řadě rozpoznat, že se jedná o poměr a přímou úměrnost. Úspěšnost žáků 7. a 8. ročníku v našem výzkumu byla u této úlohy jen kolem 40 %.⁵⁴ Úloha byla zadána v testování TIMSS 2007 v 8. ročníku jako uzavřená a dosáhla úspěšnosti jen necelých 27 %. Nejčastější nesprávná odpověď odpovídala úvaze, že stříbro tvoří jednu čtvrtinu hmotnosti slitiny (tuto odpověď vybralo téměř 44 % žáků).

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

Rozvoj jazykové gramotnosti

1. Jak rozumíš slovu *slitina*?

5. Pozoruj přísudek v první větě. Je jasné, kdo slitinu vyrobil?

2. Který bod odpovídá významu věty, že *na 1 gram zlata připadají 4 gramy stříbra*?

6. K jakému vzoru přiřadíš názvy kovů v úloze?

- a) 1 ze 4 b) 1 ku 4
c) 1 versus 4 d) 1 do 4

7. Najdi v textu ukazovací zájmeno, urči jeho pád a řekni, proč je v úloze důležité.

3. Nakresli obrázek, který bude zobrazovat situaci z úlohy.

8. Napadne tě nějaké slovo příbuzné se slovem *slitina*?

4. V jakém poměru je zlato a stříbro ve slitině, o které úloha mluví?

9. Znáš některou slavnou slitinu, podle níž byla pojmenována celá epocha? Z čeho se tato slitina hlavně skládá?

⁵³ Tomášek, V. et al. (2009, s. 31). Výzkum TIMSS 2007. Úlohy z matematiky pro 8. ročník. Ústav pro informace ve vzdělávání.

⁵⁴ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 171). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.

Řešení

(1) Slovo má několik významů, zde ve významu: *ztuhlá směs roztavených kovů*, definice viz *Slovník spisovné češtiny*,⁵⁵ pro zjištění kontextů může provést dotaz do *Českého národního korpusu*.⁵⁶ (2) b) (3) Jakýkoli obrázek, z něhož je patrný celek rozdělený na 5 částí a v němž je vyznačeno, že jedna část je zlato a zbytek stříbro. (4) 1 : 4. (5) Není; pro zjištění konatele by byla třeba reformulace, např. *Zlatníci vyrobili slitinu* – trpný vs. činný rod. (6) Zlato, stříbro – rod střední, vzor město. (7) *Této*, 2. pád – odkazuje k předcházejícímu textu, zpřesňuje, o které slitině se mluví. (8) Náročný úkol, avšak důležitý pro proniknutí do významu ústředního termínu úlohy; postup dle vyspělosti třídy – lze pracovat se slovníkem⁵⁷ – jednak žáky poučit o etymologii jako nauce o původu a vývoji slov, jednak je navést na poznání o významových i formálních souvislostech mezi slovy (rozšiřování slovní zásoby, rozvrstvení slovní zásoby, sémantika, slovo tvorba apod.): „*lít, liják, lijavec, polít, polévat, polévka, nalít, nálev, odlít, odlitek, odliv, odlivka, zalít, záliv, zálivka, přilít, přílív, přelít, přeliv, slít, slitina* (zvýraznili autoři), *slévač, slévárna, slivky, vylít, výlevka, rozlít, prolít* aj.“ S významem slov je možno dále pracovat užitím ve větách. (9) Žáci budou pravděpodobně znát dobu bronzovou (bronz = slitina hlavně mědi a cínu).



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe



Nabízíme dvě dvojice řešení. V první dvojici je nesprávné řešení Tety, která poměr *1 gram zlata na 4 gramy stříbra* interpretovala jako jednu čtvrtinu a došla k výsledku 10 gramů stříbra. Teta tedy nesprávně interpretovala poměr 1 : 4 jako zlomek $\frac{1}{4}$. Příčinou výpočtu $40 : 4$ však mohla být i návodnost použitých čísel. Bivoj vyřešil úlohu správně.

Ve druhé dvojici je nesprávné řešení Přemysla, který správně rozeznal přímou úměrnost, ale chybně zaměnil slitinu za zlato. Navíc si zjevně neudělal sémantickou zkoušku, která by ho byla na nesprávnost řešení upozornila.

Žákům můžeme položit doplňkové otázky, které mají ověřit, zda pochopili poměr správně: „Kolik gramů zlata a stříbra by obsahovalo 9 gramů této slitiny?“ „Představ si slitinu, ve které by byla hmotnost zlata dvakrát větší než hmotnost stříbra. Kolik gramů zlata bude ve 333 gramech této slitiny?“ [Devět gramů takové slitiny by obsahovalo 1,8 gramu zlata a 7,2 gramu stříbra. V popsané slitině by bylo 222 gramů zlata.]

⁵⁵ <https://prirucka.ujc.cas.cz/?slovo=slitina>

⁵⁶ *Slovo v kostce* (<https://www.korpus.cz/slovo-v-kostce/search/cs/slitina?pos=N&lemma=slitina>).

⁵⁷ Rejzek, J. (2001, s. 346). *Český etymologický slovník*. Leda.

Pracovní list 1 k úloze Slitina



Slitina je vyrobena ze zlata a stříbra tak, že na každý 1 gram zlata připadají 4 gramy stříbra. Kolik gramů stříbra je ve 40 gramech této slitiny?

TETA

Na 1 gram zlata
připadají 4
gramy stříbra.

Tedy to je
poměr 1 : 4
a to je jedna
čtvrtina.

1 gram zlata ... 4 gramy stříbra

1 : 4

Jedna čtvrtina ze 40 je 10.



Ve slitině je 10 gramů
stříbra.

BIVOJ

Ze zadání vím, že na každý
1 gram zlata připadají
4 gramy stříbra. To znamená,
že v 5 gramech slitiny jsou
4 gramy stříbra. Zajímá mne,
kolik gramů stříbra připadne
na 40 gramů slitiny.



5 gramů slitiny 4 gramy stříbra
40 gramů slitiny ? gramů stříbra

$$s = k \cdot 4$$

$$k = 40 : 5 = 8$$

$$s = k \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32$$

$$s = 32$$

Neznámý počet
gramů stříbra
označím s.

Hmotnost stříbra
ve slitině je přímo
úměrná hmotnosti
slitiny.

Nejprve vypočítám
koeficient k.

Nyní jen původní
množství stříbra,
tedy 4 gramy,
vynásobím osmi.

Ve slitině je 32 gramů
stříbra.



Pracovní list 2 k úloze Slitina



Slitina je vyrobena ze zlata a stříbra tak, že na každý 1 gram zlata připadají 4 gramy stříbra. Kolik gramů stříbra je ve 40 gramech této slitiny?

PŘEMYSL



Na každý 1 gram zlata připadají ze zadání 4 gramy stříbra. Zajímá mne, kolik gramů stříbra připadne na 40 gramů slitiny.

1 gram zlata 4 gramy stříbra
40 gramů slitiny ? gramů stříbra

Neznámý počet gramů stříbra označím s .

Využiji přímo úměrnost.

Pokud na 1 gram zlata připadne 4 gramy stříbra, pak na 40 gramů slitiny jich připadne 4krát více.

Proto je ve slitině 160 gramů stříbra.

$$s = 40 \cdot 4$$

$$s = 160$$



Ve slitině je 160 gramů stříbra.

BIVOJ



Ze zadání vím, že na každý 1 gram zlata připadá 4 gramy stříbra. To znamená, že v 5 gramech slitiny jsou 4 gramy stříbra. Zajímá mne, kolik gramů stříbra připadne na 40 gramů slitiny.

5 gramů slitiny 4 gramy stříbra
40 gramů slitiny ? gramů stříbra

Neznámý počet gramů stříbra označím s .

Hmotnost stříbra ve slitině je přímo úměrná hmotnosti slitiny.

Nejprve vypočítám koeficient k .

Nyní jen původní množství stříbra, tedy 4 gramy, vynásobím osmi.

$$s = k \cdot 4$$

$$k = 40 : 5 = 8$$

$$s = k \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32$$

$$s = 32$$



Ve slitině je 32 gramů stříbra.

Metodický list k úloze Zářivka

7. až 9. ročník

Téma: procenta

**Zářivka se prodává ve velkoobchodě za 370 Kč bez DPH a 448 Kč s DPH. Vypočítejte, kolik procent z ceny žárovky představuje DPH a jaká sazba DPH je na žárovky uva-
lena. Výsledek zaokrouhlete na celá procenta.⁵⁸**

Jedná se o slovní úlohu s reálným kontextem, s nímž se žáci běžně setkávají. Úloha vyžaduje výpočet počtu procent, přičemž je nutné, aby si žáci uvědomili, z jakého základu mají počítat. Uvědomění si základu (co tvoří 100 %) je častou příčinou žákovských chyb. U této úlohy je nejdříve 100 % částka 448 Kč a ve druhé části otázky je to částka 370 Kč.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Jedná se v úloze o dva cenově různé typy žárovek?

2. Co znamená DPH?

3. Vysvětli svými slovy první větu úlohy.

4. Nakresli obrázek, který bude znázorňovat, z čeho se skládá cena žárovky.

Rozvoj jazykové gramotnosti

5. Jaký je význam slova *velkoobchod*?

6. Přeformuluj první větu úlohy, avšak zachovejte slovesný rod.

7. Vysvětli význam slova *procento*.

Řešení

(1) Nikoliv, jedná se stále o jednu žárovku, nepřesná formulace, žáci mohou opravovat. **(2)** Daň z přidané hodnoty, další vysvětlení dle úvahy vyučujícího. **(3)** Např.: Jedna a ta samá zářivka může mít ve velkoobchodě dvě ceny: 370 Kč, pokud nezapočítáváme DPH, a 448 Kč, pokud započítáváme DPH. **(4)** Obrázek by měl znázorňovat celkovou cenu sestávající ze dvou částek – základ daně a DPH. **(5)** Jedná se o kompozitum, zajímavostí ale je, že se nejedná o *velký obchod*, ale o *obchod ve velkém*.⁵⁹ **(6)** Zářivka je prodávána. **(7)** Ačkoliv

⁵⁸ Na úloze a řešení fiktivních žáků se podílela Gabriela Kuchaříková.

⁵⁹ Internetová jazyková příručka (<https://prirucka.ujc.cas.cz/?slovo=velkoobchod>).

se jedná o termín, s nímž žáci běžně pracují, budou mít pravděpodobně problém vysvětlit, jak mu rozumějí. K vysvětlení mohou nahlédnout do slovníků.⁶⁰



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Obě předložená řešení jsou správná.



V první části úlohy Elza vypočítala, jakou část konečné ceny zářivky tvoří částka na DPH. Ve druhé části úlohy zjistila, čím musí vynásobit daňový základ (370 Kč), aby získala konečnou cenu zářivky. V obou případech správně interpretovala výsledky jako procenta. Elzino řešení je rychlé, ale pro některé žáky může být obtížné jej pochopit. Na druhé straně Olafovo řešení je dobře pochopitelné, protože Olaf řešil obě části úlohy pomocí výpočtu, kolik je jedno procento z celku a kolikrát se vejde do dané částky DPH.

⁶⁰ Internetová jazyková příručka (<https://prirucka.ujc.cas.cz/?slovo=procento>).

Pracovní list k úloze Zářivka



Zářivka se prodává ve velkoobchodě za 370 Kč bez DPH a 448 Kč s DPH. Vypočítejte, kolik procent z ceny žárovky představuje DPH a jaká sazba DPH je na žárovky uvalena. Výsledek zaokrouhlete na celá procenta.

ELZA

DPH je celkem 78 Kč.

Zjistím, jaká část to je vzhledem k celkové ceně žárovky.

Částka 370 Kč je vlastně základ, z něhož se počítá DPH. Tedy musím zjistit, čím musím tuto částku vynásobit, abych dostala částku, za kterou se žárovka prodává.

$$448 - 370 = 78$$

$$y = 78 : 448$$

$$y = 0,174107...$$

$$370 \cdot x = 448$$

$$x = 448 : 370$$

$$x = 1,210810...$$

OLAF

DPH je celkem 78 Kč.

Nejdříve si vypočítám 1% z celkové částky a zjistím, kolikrát se vejde do té částky DPH.

Vyšlo mi asi 17%.

DPH se počítá z té velkoobchodní ceny, tedy z 370 Kč. Tedy zjistím, jaká část je těch 78 Kč vzhledem k částce 370 Kč. Vyšlo mi 21%.

$$448 - 370 = 78$$

$$100\% \dots\dots\dots 448 \text{ Kč}$$

$$1\% \dots\dots\dots 4,48 \text{ Kč}$$

$$78 : 4,48 = 17,4107...$$

$$100\% \dots\dots\dots 370 \text{ Kč}$$

$$1\% \dots\dots\dots 3,70 \text{ Kč}$$

$$78 : 3,70 = 21,081...$$

78 Kč je asi 17% celkové ceny žárovky.

DPH je 21%.



Metodický list k úloze Kamarádky

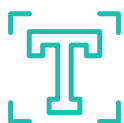
8. a 9. ročník

Téma: rovnice, soustavy rovnic

Kamarádky Kamila a Bára si šetřily peníze na výlet. Na začátku měla Bára o 45 Kč více než Kamila. Kamila své počáteční úspory zdvojnásobila a Bára zvýšila své počáteční úspory o 75 Kč tak, že před odjezdem na výlet měly obě stejně. Kolik peněz měla na začátku Bára a kolik měla Kamila?⁶¹

Jedná se o úlohu, která je řešitelná pomocí soustavy rovnic. Je poměrně komplexní (vyřešilo ji jen 28 % žáků 8. ročníku z našeho výzkumu⁶²), a proto doporučujeme věnovat dostatek času dobrému pochopení její struktury – jak vypadala situace na začátku, co se pak stalo (a jaký byl celek, ke kterému se změny vztahovaly) a jak to nakonec dopadlo. Dobrý vhled žáci získají, pokud budou požádáni, aby nejdříve provedli nějaké odhady pro počáteční stav a uspořádali je do tabulky. Úloha se však dá řešit i pomocí úsečkového diagramu a jednoduché úvahy, na což vede jedno z nabízených řešení. Proto by učitel ještě před předložením fiktivních řešení mohl žáky vybídnout k náskresu situace a o něm potom s žáky mluvit.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. a) Která z dívek měla vyšší počáteční úspory?
b) Nakresli celou situaci pro někoho, kdo zadání úlohy nepochopil.

2. Které tvrzení jednoznačně plyne z textu slovní úlohy?

- a) Bára měla více peněz na začátku, a proto musela mít více peněz i na konci spoření.
- b) Bára a Kamila celkově uspořily stejnou částku.
- c) Bára a Kamila musely začít rychle spořit, protože na počátku neměly žádné peníze.

Rozvoj jazykové gramotnosti

6. Nahraď slova *spořit* a *úspory* synonymy (slovy či slovními spojeními).

7.
 - a) Proč se ve slovech *šetřily* a *měly* píšou tvrdá y po l? Jak by se muselo zadání změnit, aby se v těchto slovech mohlo psát i?
 - b) Přeformuluj část *Kamarádky Kamila a Bára* tak, abys při zachování významu použil/a jinou spojku. Odůvodni pravopis.

⁶¹ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 147). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologíí*. Karolinum.

⁶² Vondrová et al., 2019.

3. Jak můžeš vyjádřit jinými slovy Kamila své počáteční úspory zdvojnásobila?

4. Zadej si nějakou počáteční hodnotu sumy Báry a sumy Kamily tak, aby se lišily o požadovaných 45 Kč. Zjisti, jaká bude situace, než pojedou na výlet. Totéž opakuj pro jiné hodnoty.

5. U úkolu 4 jsi zapsal/a několik výpočtů. Dokážeš je napsat obecněji?

8.

a) Jaký je významový poměr mezi větami v souvětí *Kamila své počáteční úspory zdvojnásobila a Bára zvýšila své počáteční úspory o 75 Kč?*

b) Přeformuluj souvětí tak, aby obsahovalo vedlejší větu, a pokus se vysvětlit, jak se změnil význam. Vybírej z těchto spojek: *zatímco, protože, jakmile*.

9. Posuď, zda v následujících větách můžeme vynechat předmět: *Kamila své počáteční úspory zdvojnásobila a Bára zvýšila své počáteční úspory o 75 Kč.*

Řešení

(1) a) Bára, b) jeden z možných nákrešů je v řešení v pracovním listu; učitel by měl dát žákům možnost, aby se nejprve pokusili o své vlastní nákresy (i kdyby nebyly správné). (2) b) (3) *Kamila měla dvakrát tolik než předtím.* (4+5) Např.: Kamila měla na začátku 50 Kč a Bára 95 Kč, před výletem měla Kamila dvojnásobek, tedy 100 Kč a Bára ušetřila ještě 75 Kč, měla tedy 170 Kč; rozdíl jejich částek je 70 Kč; zkusíme tedy jiné částky – můžeme vést žáky k tomu, aby výpočet zapsali jedním výpočtem (což jim usnadní sestavení rovnice), např. $70 \cdot 2 - (115 + 75) = -50$, atd. (6) *Šetřit; našetřené/naspořené peníze (rezerva).* (7) a) Shoda přísudku s podmětem – podmět je rodu ženského v množném čísle; dvě možnosti: buď by namísto děvčat figurovali dva hoši (*kamarádi*), nebo hoch a dívka (shoda se řídí podmětem rodu mužského životného; b) *Kamila s Bárou* – předložku se 7. pádem píšeme *s*. (8) a) Poměr slučovací, souřadící spojka *a*, před spojkou ve slučovacím poměru nepíšeme čárku; b) transformační cvičení, práce s textem, rozvoj logického myšlení prostřednictvím přesného použití náročnějších spojovacích výrazů; použití každé z nabízených spojek zcela změnil význam souvětí: *Zatímco Kamila své počáteční úspory zdvojnásobila, Bára zvýšila své počáteční úspory o 75 Kč. Kamila své počáteční úspory zdvojnásobila, zatímco Bára zvýšila své počáteční úspory o 75 Kč, Protože Kamila své počáteční úspory zdvojnásobila, Bára zvýšila své počáteční úspory o 75 Kč. Kamila své počáteční úspory zdvojnásobila, protože Bára zvýšila své počáteční úspory o 75 Kč. Jakmile Kamila své počáteční úspory zdvojnásobila, Bára zvýšila své počáteční úspory o 75 Kč. Kamila své počáteční úspory zdvojnásobila, jakmile Bára zvýšila své počáteční úspory o 75 Kč.* (9) Ne, předmět (*úspory*) je základem věty, jeho vynecháním věta (věty) ztratí smysl.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Předkládáme dvě dvojice řešení, všechna řešení jsou správná.



V první dvojici klademe vedle sebe dva velmi odlišné způsoby. Háta si situaci přehledně zakreslila a k řešení jí stačilo správně interpretovat jednotlivé úsečky nákresu. Cezar vyřešil úlohu pomocí tabulky a lineární rovnice.

Další dvě řešení obsahují lineární rovnice, které se liší volbou neznámé. Cílem je, aby si žáci uvědomili, že na této volbě nezáleží. Měli by pochopit, jak oba fiktivní žáci k rovnicím dospěli. Např. můžeme žákům položit otázku „Proč měla Bára podle Makara na začátku $x - 75$ Kč a podle Kamila $x/2$ Kč?“.

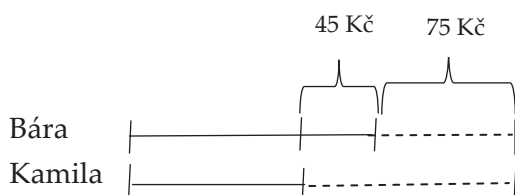
Při diskusi může učitel položit ještě doprovodnou otázku: „Jak by Cézar a Makar vyjádřili částku, kterou má třetí dívka (Klára), pokud by měla 4krát více korun, než měla Kamila na začátku?“ Cílem je zjistit, do jaké míry žáci pochopili logiku řešení obou fiktivních žáků. Očekáváme, že žáci zjistí, že v takovém případě by Cézar vyjádřil částku Kláry jako $4x$ a Makar jako $4 \cdot x/2 = 2x$.

Pracovní list 1 k úloze Kamarádky



Kamarádky Kamila a Bára si šetřily peníze na výlet. Na začátku měla Bára o 45 Kč více než Kamila. Kamila své počáteční úspory zdvojnásobila a Bára zvýšila své počáteční úspory o 75 Kč tak, že před odjezdem na výlet měly obě stejně. Kolik peněz měla na začátku Bára a kolik měla Kamila?

HÁTA



Zadání úlohy si zakreslím pomocí úseček. Situaci na začátku znázorním plnou čarou a situaci na konci (před odjezdem) přerušovanou čarou.

Z obrázku vyčtu, že 45 Kč a 75 Kč je polovina konečných úspor Kamily.



CÉZAR

Zkusím úlohu vyřešit tak, že budu postupovat od začátku. Označím si počet Kč, které měla Kamila na začátku, jako x . Na základě této neznámé vyjádřím ostatní částky. Nejdřív si udělám tabulku.



	Kamila (Kč)	Bára (Kč)
na začátku	x	$x + 45$
před odjezdem	$2x$	$x + 45 + 75$

Z tabulky vytvořím rovnici – před odjezdem mají obě dívky stejně.

Rovnici vyřeším a mám výsledek.

$$2x = x + 45 + 75$$

$$x = 120$$

Tedy na začátku měla Kamila 120 Kč a Bára 165 Kč.



Pracovní list 2 k úloze Kamarádky (první část)



Kamarádky Kamila a Bára si šetřily peníze na výlet. Na začátku měla Bára o 45 Kč více než Kamila. Kamila své počáteční úspory zdvojnásobila a Bára zvýšila své počáteční úspory o 75 Kč tak, že před odjezdem na výlet měly obě stejně. Kolik peněz měla na začátku Bára a kolik měla Kamila?

CÉZAR

Zkusím úlohu vyřešit tak, že budu postupovat od začátku. Označím si počet Kč, které měla Kamila na začátku, jako x . Na základě této neznámé vyjádřím ostatní částky. Nejdřív si udělám tabulku.



	Kamila (Kč)	Bára (Kč)
na začátku	x	$x + 45$
před odjezdem	$2x$	$x + 45 + 75$

MAKAR

Když se v zadání úlohy píše, že před odjezdem měly Bára a Kamila stejně, tak budu postupovat od konce. Částky, které měly Kamila a Bára před odjezdem, si označím jako x . A na základě této neznámé vyjádřím zbytek a udělám tabulku.



	Kamila (Kč)	Bára (Kč)
na začátku	$\frac{x}{2}$	$x - 75$
před odjezdem	x	x

Pracovní list 2 k úloze Kamarádky (druhá část)



CÉZAR

MAKAR

Ze zadání vím, že měly obě dívky před odjezdem stejně.

Dle tabulky sestavím příslušnou rovnici.

Rovnici lehce vyřeším.

Hodnota neznámé x představuje částku, kterou měla Kamila na začátku.

Bára měla ještě o 45 Kč více než Kamila.



$$2x = x + 45 + 75$$

$$2x = x + 120 \quad | - x$$

$$x = 120$$

Kamila:

$$x = 120$$

Bára:

$$x + 45 = 165$$

$$x - 75 = \frac{x}{2} + 45$$

$$x = \frac{x}{2} + 45 + 75 \quad | \cdot 2$$

$$2x = x + 240 \quad | - x$$

$$x = 240$$

Bára:

$$x - 75 = 240 - 75 = 165$$

Kamila:

$$\frac{x}{2} = \frac{240}{2} = 120$$

Budu porovnávat částky dívek na začátku.

Ze zadání vím, že Bára měla o 45 Kč více než Kamila.

Použiji zápis z tabulky a vytvořím rovnici.

V závislosti na hodnotě neznámé x určím, kolik měly dívky Kč na začátku.



Na začátku měla Bára 165 Kč a Kamila 120 Kč.

Metodický list k úloze Pepa

8. a 9. ročník

Téma: rovnice, soustava rovnic

Pepa ví, že pero stojí v papírnictví o 5 korun více než tužka. Jeho dobrý kamarád za 40 korun koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik korun bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky?

Úloha byla vytvořena na základě úlohy zadané v TIMSS 2007 žákům 8. ročníku. V ní byla použita fiktivní měna zedy a jiná čísla (o 1 zed více místo o 5 korun více; za 17 zedů místo za 40 korun) a byla mírně kratší. Úloha byla v TIMSS zadána jako úloha vyžadující rovnice, ale z 25 % žáků, kteří v ní byli úspěšní, jen čtvrtina řešila úlohu rovnicí, zbytek řešil úlohu úvahou.⁶³ V našem výzkumu⁶⁴ byla zadána původní varianta TIMSS a žáci 7. a 8. ročníku dosáhli úspěšnosti cca 54 %. V případě použití korun místo zedů se zvýšila na cca 69 %. Obtížnost úlohy je dána zřejmě tím, že pro žáky je těžké získat vzhled do vztahů mezi objekty – k tomu by jim mohla pomoci např. výzva, aby si nějaké ceny tužky a pera sami zadali a zjišťovali, jak se bude měnit celková cena.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Může být pero jen o pět korun dražší než tužka? Jaké to asi bylo pero a jaká tužka? Kolik korun přibližně stálo pero ve tvém penálu? A kolik tužka?

2. Zadej si nějaké konkrétní ceny pro pero a tužku, aby se lišily o požadovaných 5 korun. Zjišťuj celkovou cenu pro různé ceny. Zapisuj výsledky do tabulky.

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Urči druhy vedlejších vět v textu úlohy. Obměň první souvětí v úloze tak, aby obsahovalo vedlejší větu podmětnou.

5. Jaká je neutrální podoba vlastního jména Pepa? Jak se označuje tento druh vlastních jmen?

6. Jakým způsobem vzniklo slovo *papírnictví*? Proveď slootvorný rozbor. Napiš další slova, která vznikla stejným způsobem.

⁶³ Tomášek, V. et al. (2009, s. 47). Výzkum TIMSS 2007. Úlohy z matematiky pro 8. ročník. Ústav pro informace ve vzdělávání.

⁶⁴ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 175). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.

3. V úkolu 2 jsi zapisoval/a výpočty pro různé ceny tužky a pera. Zapiš tento výpočet obecně pro neznámou cenu tužky a neznámou cenu pera.

7. Co vše můžeme pojmenovávat vlastními jmény? Uveď také příklady. Uveď všechny druhy vlastních jmen, které znáš (pracuj s Pravidly českého pravopisu).

Řešení

(1) Muselo jít o nějaké levné kuličkové pero a o obyčejnou tužku. **(2+3)** Např. pro tužku za 3 Kč a pero za 8 Kč je výpočet $2 \cdot 8 + 3 \cdot 3 = 25$, pro tužku za 4 Kč a pero za 9 Kč je to $2 \cdot 9 + 3 \cdot 4 = 30$; obecně $2 \cdot x + 3 \cdot (x + 5) =$. **(4)** Předmětná, příslovečná účelová; např. *Ví se, že pero stojí...*, *Je zřejmé, že pero stojí...* aj. **(5)** Josef, Josefína; vlastní jméno domácí (hypokoristikum). **(6)** Odvozováním, papír (základové slovo / slovotvorný základ) -nictví (slovotvorná přípona), např. obuvnictví. **(7)** Jména živých bytostí – jména lidí (např. Josef), jména zvířat (např. Modroočko); jména neživých objektů a jevů – jména zeměpisná (Praha), jména lidských výtvorů, institucí apod. (kniha Babička, vysavač Eta, obchod Lidl, firma Škoda aj.); dle úrovně třídy, ke zvážení v 8. ročníku, v 9. ročníku bez pochyb: výpisky, výtah – domácí práce s *Pravidly českého pravopisu*.⁶⁵



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Obě předložená řešení⁶⁶ jsou správná. Kazi nepoužila žádné značení proměnných a úlohu řešila substitucí (dvakrát nahradila cenu pera cenou tužky a pěti korunami). Zjistila tak cenu jedné tužky a poté Pepova nákupu.



Bivoj použil „školskou“ strategii. Označil si proměnné písmeny a sestavil soustavu rovnic, kterou vyřešil sčítací metodou.

⁶⁵ Viz Internetová jazyková příručka (<https://prirucka.ujc.cas.cz/>).

⁶⁶ Řešení fiktivních žáků upraveno podle práce (Kohout, O. [2021, s. 43.] *Porovnávání strategií při řešení typových slovních úloh*. Bakalářská práce. PedF UK).

Pracovní list k úloze Pepa



Pepa ví, že pero stojí v papírnictví o 5 korun více než tužka. Jeho dobrý kamarád za 40 korun koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik korun bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky?

KAZI

$$1 \text{ pero} = 1 \text{ tužka} + 5 \text{ Kč}$$

$$2 \text{ pera} + 3 \text{ tužky} = 40 \text{ Kč}$$

$$1 \text{ pero} + 2 \text{ tužky} = ? \text{ Kč}$$

$$2 \text{ pera} + 3 \text{ tužky} = (2 \text{ tužky} + 10 \text{ Kč}) + 3 \text{ tužky} = 5 \text{ tužek} + 10 \text{ Kč} = 40 \text{ Kč}$$

$$5 \text{ tužek} = 30 \text{ Kč} \Rightarrow 1 \text{ tužka} = 6 \text{ Kč}$$

$$1 \text{ pero} + 2 \text{ tužky} = (1 \text{ tužka} + 5 \text{ Kč}) + 2 \text{ tužky} = 3 \text{ tužky} + 5 \text{ Kč}$$

$$3 \text{ tužky} + 5 \text{ Kč} = 3 \cdot 6 \text{ Kč} + 5 \text{ Kč} = 23 \text{ Kč}$$

Aby si mohl Pepa koupit 1 pero a 2 tužky, bude potřebovat 23 korun.



Zapišu si, co vím.

Nejdřív zjistím, kolik stojí jedna tužka.

Jedna tužka bude stát 6 korun.

Jedno pero a dvě tužky budou stát stejně jako tři tužky a 5 korun k tomu.

Tedy celkem 23 korun.

BIVOJ

$$p = t + 5 \Rightarrow p - t = 5;$$

$$2p + 3t = 40; \quad p + 2t = ?$$

$$p - t = 5 \quad | \cdot (-2)$$

$$2p + 3t = 40$$

$$-2p + 2t = -10$$

$$2p + 3t = 40$$

$$5t = 30 \Rightarrow t = 6$$

$$p = t + 5 \Rightarrow p = 11$$

$$p + 2t = 11 + 2 \cdot 6 = 23$$

Na zakoupení 1 pera a 2 tužek bude Pepa potřebovat 23 korun.



Ceny pera a tužky po řadě označím p, t.

Zadání úlohy přepíšu do rovnic a úlohu budu řešit sčítací metodou.

Nejdříve zjistím, kolik stojí tužka.

Z ceny tužky lehce vypočítám cenu pera.

Metodický list k úloze Jízdné

8. a 9. ročník

Téma: procenta, poměr

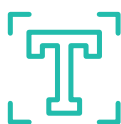
Studenti do 26 let mají jízdné o 75 % levnější než dospělí. Všech 60 míst v autobusu do Prahy bylo obsazeno pouze studenty a dospělými. Žádní senioři ani děti v autobusu nejeli. Když sečteme, kolik za jízdenky zaplatili celkem dospělí a kolik zaplatili celkem studenti, dostaneme stejné částky. Kolik studentů jelo autobusem?⁶⁷

Úloha patří mezi úlohy o směsi, ale současně jde o tzv. operátorovou úlohu, v níž hrají roli pouze operátory (v našem případě v podobě procent). Ke správnému řešení není nutné znát cenu jízdného, stačí pracovat se vztahem mezi jízdným pro dospělé a pro studenty. To je pro mnohé žáky překážka, kterou nedovedou překonat, a úlohu vzdávají s tím, že se řešit nedá. Úlohu lze ovšem řešit i tak, že si žáci nějaký stav (tedy cenu jízdného pro dospělé) vhodně zvolí. Právě na tento případ cílí jedno z nabízených řešení. S žáky je pak třeba diskutovat o tom, zda si uvědomují, že tento stav si mohli zvolit libovolně. K obecnosti řešení je možné je dovést tak, že si řešení vyzkouší s různými počátečními stavy. Cílem je, aby si žáci uvědomili obecnost řešení operátorových úloh – na čísla v roli stavu v jejich řešení nezáleží, záleží jen na vzájemných vztazích operátorů.



Při pilotážích někteří žáci sami poznamenávali, že je zbytečné, aby si Bivoj (jehož řešení předkládáme v pracovním listu) volil cenu jízdenky. Jiní namítali, že si nemůžeme dovolit takovou cenu zvolit, protože by to pak neplatilo vždycky.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Rozhodni o každém z tvrzení, zda jednoznačně vyplývá z textu:
 - a) V autobusu do Prahy jeli studenti, dospělí, senioři a děti.
 - b) Studenti do 26 let platí za jízdné 75 % z ceny jízdného pro dospělé.
 - c) Autobus do Prahy je 60místný.

Rozvoj jazykové gramotnosti

5. Který titulek v žádném případě **nevystihuje** obsah úlohy?
 - a) Vysokoškoláci jezdí levněji.
 - b) Pěťadvacetiletí jezdí levněji, ačkoliv nestudují žádnou školu!
 - c) Nespravedlnost! Senioři platí stejně jako dospělí v produktivním věku!
 - d) Autobusy do Prahy šedesátimístné!

⁶⁷ Úlohu a řešení fiktivních žáků vytvořil Ondřej Kohout a upravil autorský tým Metodiky.

- | | |
|--|--|
| d) V autobusu do Prahy jel stejný počet studentů jako dospělých. | 6. Podtrhni přísudek ve druhé větě úlohy a urči slovesný rod. Přeformuluj větu tak, abys použil/a slovesný rod opačný. |
| e) Všichni studenti dohromady zaplatili za jízdné stejnou částku jako všichni dospělí. | |
| 2. Jelo v autobusu do Prahy více dospělých, nebo více studentů? | 7. Jaký je tvar slova <i>autobus</i> v 6. pádě? Který z tvarů používáš ty? Znáš ještě jiná slova, která mají v 6. pádě více různých tvarů? |
| 3. Byla v autobusu nějaká prázdná místa? | |
| 4. Je možné z textu úlohy zjistit, kolik stála jízdenka do Prahy pro dospělého? | 8. Přepiš slovy 75 % a 75%. |

Řešení

(1) a) Ne, b) ne, c) ano, d) ne, e) ano. (2) Více studentů. (3) Ne. (4) Ne. (5) Správná je odpověď b) a c) – úloha mluví o studentech, ne o osobách do 26 let; informace o seniorech je redundantní, neboť úloha vůbec nezmiňuje, kolik senioři platí (stejná okolnost platí o dětech). (6) *Bylo obsazeno*, trpný rod; *Studenti a dospělí obsadili všech 60 míst v autobuse*. (7) *Autobusu/autobuse*; např. hrad – poučení o kolísání a dubletách. (8) *Sedmdesát pět procent*; *sedmdesátipětiprocentní*; pravopisu procent doporučujeme věnovat zvýšenou pozornost, neboť se v něm často chybuje, přitom různé způsoby psaní zásadně mění význam.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe



Sámo začal své řešení úvahou, že studenti za jízdenky platí 25 % ceny jízdenek pro dospělé, a tak jich pojede čtyřikrát více než dospělých (mají-li celkem zaplatit stejně). Počet studentů určil rozdělením 60 v poměru 4 : 1. Jeho řešení je správné a ukazuje dobrý vhled do problematiky procent a jak procenta souvisí se zlomky.

Bivoj použil typickou učebnicovou strategii pro úlohy o směsi – soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Absenci stavu vyřešil vhodně zvolenou cenou jízdenky pro dospělé a úlohu správně dořešil. Zde je vhodné s žáky hovořit o tom, zda je takové řešení přípustné a zda by si Bivoj mohl zvolit jinou cenu jízdenky pro dospělé.



Návazná práce

Operátorové úlohy nejsou podle našich zkušeností v učebnicích příliš časté. Proto by bylo vhodné, aby je učitel zařadil a žáci si mohli upevnit poznatky získané při práci s úlohou Jízdné. Několik takových úloh uvádíme,⁶⁸ přičemž úlohy uvedené na začátku jsou vhodné i pro žáky 1. stupně. U žáků 2. stupně bychom je zařadili v případě, že měli s pochopením principu řešení úlohy Jízdné závažné problémy. V závorce je vždy uveden výsledek. Procentuální výsledky úspěšnosti řešení u těchto úloh (oproti jejich variantám, v nichž jsme jeden počáteční stav nabídli a v nichž byli žáci obecně úspěšnější) lze najít v kap. 11 knihy shrnující náš výzkum slovních úloh.⁶⁹

V Metodice nabízíme ještě jednu operátorovou úlohu (POR42. Sprinteři).

V tomto týdnu Otesánek rychle přibyl na váze. Ve středu vážil o 7 kilogramů více než v pondělí, ale o 4 kilogramy méně než v neděli. Kolik kilogramů Otesánek během tohoto týdne přibral? [11 kg]

Kovové kružítko je šestkrát dražší než mikrotužka, mikrotužka je třikrát dražší než pravítko. Kolikrát je kružítko dražší než pravítko? [18krát]

Kovové kružítko je šestkrát dražší než mikrotužka, pravítko je třikrát levnější než mikrotužka. Kolikrát je kružítko dražší než pravítko? [18krát]

⁶⁸ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologii*. Karolinum.

⁶⁹ Vondrová et al., 2019.

Pracovní list k úloze Jízdné



Studenti do 26 let mají jízdné o 75 % levnější než dospělí. Všechny 60 míst v autobusu do Prahy bylo obsazeno pouze studenty a dospělými. Žádní senioři ani děti v autobusu nejeli. Když sečteme, kolik za jízdenky zaplatili celkem dospělí a kolik zaplatili celkem studenti, dostaneme stejné částky. Kolik studentů jelo autobusem?

SÁMO

Zjistím, kolik procent z ceny pro dospělé platí studenti.

Převedu na zlomek. Studenti platí pouze čtvrtinu.

Takže jich musí být 4krát více než dospělých.

60 míst rozdělím na 5 částí. Vynásobím číslem 4.

Mám výsledek.

$$100 \% - 75 \% = 25 \%$$

$$25 \% \dots\dots\dots \frac{1}{4}$$

Studenti mají jízdné 4krát levnější než dospělí.

studenti : dospělí

$$4 : 1$$

$$60 : 5 = 12$$

$$12 \cdot 4 = 48$$

48 studentů

BIVOJ

studenti..... x

dospělí y

ceny jízdenek:

dospělí 100 Kč

studenti 25 Kč

$$(I) \quad x + y = 60$$

$$(II) \quad 25x = 100y$$

$$\frac{x}{4} = y$$

$$x + \frac{x}{4} = 60 \quad | \cdot 4$$

$$5x = 240 \quad | :5$$

$$\underline{x = 48}$$

Nejdřív si zvolím počty studentů a dospělých jako neznámé.

Zvolím cenu jízdenky pro dospělé 100 Kč, aby se mi to dobře počítalo. Určím cenu pro studenty.

Sestavím soustavu dvou rovnic.

Z (II) vyjádřím y. Dosadím do (I) a vynásobím obě strany číslem 4.

Vydělím číslem 5.

Autobusem jelo 48 studentů.

Metodický list k úloze Trubka

8. a 9. ročník

Téma: výrazy

První trubka je dlouhá x metrů. Druhá trubka je y -krát delší než první. Jak dlouhá je druhá trubka? Zapiš algebraickým výrazem.



Úloha je zaměřena na algebraické vyjádření vztahů, konkrétně jak lze zapsat, že je něco několikrát větší než něco jiného. Úloha byla zadána v testování TIMSS 2007 žákům 8. ročníku jako úloha s výběrem odpovědi.⁷⁰ Žáci dosáhli průměrné úspěšnosti 57 % a jako nejčastější nesprávnou odpověď vybírali výraz $x + y$. Námi testovaní žáci 8. a 9. ročníku dosáhli průměrné úspěšnosti jen 29 %, ale ta se zvýšila na 46 % při zadání úlohy bez obrázku.⁷¹ Zjistili jsme, že přítomnost obrázku zde působí spíše jako překážka než jako pomůcka. Někteří žáci totiž obě trubky mezi sebou vizuálně poměřovali a psali výsledky typu $2x$. Ztotožnili myšlené objekty s jejich reprezentacemi. Na toto nesprávné řešení cílí náš pracovní list.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Rozhodni, zda platí následující tvrzení: *Nikde v textu není uvedeno, jak jsou trubky dlouhé. Úlohu proto nelze vyřešit.*

2. Přeformuluj úlohu tak, aby výsledný algebraický výraz zněl $x - y$.

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Následující slovní úloha je na první pohled takřka totožná s úlohou v zadání. Změnili jsme jen jedno slovo: *První trubka je dlouhá x metrů. Druhá trubka je y -krát kratší než první. Jak dlouhá je druhá trubka?*

5. Spoj první dvě věty tak, aby vzniklo souvětí. Použij vhodný spojovací výraz.

- Které slovo jsme změnili?
- Jak bys toto slovo popsal z jazykového hlediska?

⁷⁰ Tomášek, V. et al. (2009, s. 43). Výzkum TIMSS 2007. Úlohy z matematiky pro 8. ročník. Ústav pro informace ve vzdělávání.

⁷¹ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvátal, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 132). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.

3. V čem se liší následující úloha oproti úloze v zadání? *Jeden rovný dílek autodráhy měří x centimetrů. Petr chce postavit základní rovnou část autodráhy, která měří y centimetrů. Kolik musí z krabice vyndat rovných dílků autodráhy? Zapiš algebraickým výrazem.*

- c) Na co si musíš dávat pozor při pravopisu tohoto slova?
d) Jak se změní výsledný algebraický výraz?

Řešení

(1) Tvrzení neplatí. Do výsledného algebraického výrazu xy můžeme dosadit jakékoli číslo; žákům můžeme napovědět i tak, že je vyzveme, aby zapsali trubku dvakrát větší, jedenapůlkrát větší atd. (2) *První trubka je dlouhá x metrů. Druhá trubka je o y kratší než první. Jak dlouhá je druhá trubka?* (3) Cílem je, aby si žáci uvědomili výhodu univerzálnosti a obecné upotřebitelnosti práce bez zadaných číselných hodnot; řešení: y/x , hodnoty mohou být například $150/25 = 6$ (potřebuje 6 rovných dílků autodráhy). (4) a) *Kratší*; b) 2. stupeň přídavného jména *krátký*; c) je třeba si pamatovat, že druhý stupeň přídavného jména *krátký* se tvoří příponou *-ší*, oproti tomu některá jiná přídavná jména na *-ký* (např. *hebký*) mají druhý stupeň ve tvaru *hebkí*; d) x/y . (5) *Zatímco, kdežto.*



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe



Háta řešila úlohu na základě vizuálního porovnání obou obrázků trubek. Došla k závěru, že druhá je dvakrát delší než první. Neuvedomila si, že obrázek zde má jen roli ilustrace. Návodnost obrázku je zřejmě i příčinou druhého nesprávného řešení Háty ($x + y$) – obě trubky jsou umístěny za sebou a evokují sčítání.

Bivoj vyřešil úlohu správně a správně svou úvahu i vysvětlil.

Úlohu lze dále rozvinout a požádat žáky, aby zapsali délku první trubky pomocí délky druhé trubky.

Pracovní list k úloze Trubka



První trubka je dlouhá x metrů. Druhá trubka je y -krát delší než první. Jak dlouhá je druhá trubka? Zapiš algebraickým výrazem.



HÁTA

Když si obrázky změřím,
dostávám, že druhá trubka
je dlouhá $2x$.

Je ale divné, že nepotřebuji
vůbec to y .

Aha, bude to $x + y$.



BIVOU

Kdyby ta druhá trubka byla
dvakrát delší než ta první,
pak bych to napsal jako $2x$.

Takže pro y -krát delší to
bude jednoduše xy .



Metodický list k úloze Moučník

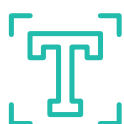
8. a 9. ročník

Téma: objem, rovnice

Dáša se ráno rozhodla upéct nějaký moučník. Měla doma obdélníkovou formu o rozměrech 28 cm x 56 cm. V kuchařce našla recept na mrkvový koláč, který ji zaujal. Umíchala těsto, vylila ho do formy a dala péct. Při pečení si všimla, že množství surovin v receptu odpovídalo formě o rozměrech 14 cm x 28 cm. V receptu stálo, že upečený koláč bude vysoký 8 cm. Jak vysoký bude Dášin koláč?⁷²

Kontext úlohy je snadno představitelný. Úloha se týká objemu kvádru a dá se řešit výpočtem či úvahou. Jedno z nabízených řešení cílí na častý žákovský (nesprávný) předpoklad, že pokud se zvětší strany obdélníku k -krát, pak se obsah zvětší také k -krát (správně je k^2 -krát).

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Je forma, kterou použila Dáša, větší, či menší než forma, pro kterou je vytvořen recept?
2. Bude Dášin koláč vyšší, nebo nižší než koláč, který odpovídá receptu?
3. Co měla Dáša udělat, aby byl její koláč stejně vysoký jako koláč, který odpovídá receptu?

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Vymysli a napiš recept na rychlý olejový koláč. Ingredience: 2 hrnky polohrubé mouky, hrnek teplého mléka, 1/2 hrnku cukru, 1/2 hrnku oleje, jedno vejce, 1 ks balíčku prášku do pečiva, 1/2 ks balíčku vanilkového cukru, tuk na vymazání pekáče, mouka nebo strouhanka na vysypání pekáče
5. V jakém významu je v textu úlohy použito slovo *kuchařka*? Jaký jiný význam má toto slovo?
6. Podívej se do etymologického slovníku a zjisti, jakým způsobem vzniklo slovo *kuchařka*.
7. Souvětí *V kuchařce našla recept na mrkvový koláč, který ji zaujal* přeformuluj tak, aby slovo *jí* bylo psáno s dlouhým *í*.

⁷² Úlohu a řešení fiktivních žáků vytvořil Ondřej Kohout a upravil autorský tým Metodiky.

Řešení

(1) Větší. (2) Nižší. (3) Upravit množství surovin. (4) Otevřená úloha – popis pracovního postupu. (5) Kniha s recepty; žena připravující pokrmy – poučení o homonymii v jazyce. (6) Odvozením (přechýlením) slova kuchař; zkrácením slovního spojení kuchařská kniha (univerbizace). (7) Zájmeno je třeba převést do 2., 3. nebo 7. pádu, např.: *V kuchaře našla recept na mrkvový koláč, který jí včera ukazovala kamarádka.*



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Julius řešil úlohu přes výpočet objemu koláče a vycházel ze správného předpokladu, že musí být pro obě pečící formy stejný. Výšku koláče v použité formě určil ze vzorce pro objem kváдру. S výjimkou poslední rovnice je jeho řešení čistě numerické.



Obdobně jako Julius vyšla Aida z toho, že objem těsta je v obou formách stejný. Úlohu řešila algebraicky bez výpočtu objemu těsta. Všimla si, že stěny větší formy mají jeden rozměr dvojnásobný oproti menší formě, ale opomenula fakt, že zvětší-li se délky obou stran obdélníku dvojnásobně, zvýší se jeho obsah čtyřnásobně. Julius na problém zvětšení obsahu při zvětšení rozměrů obdélníka nenarazil, protože v jeho strategii nemá úvaha o tom, kolikrát je Dášina forma větší než plánovaná forma, místo.

Pokud bude pro žáky identifikace Aidiny chyby obtížná, můžeme jim zadat modifikovanou úlohu, v níž se jeden rozměr obdélníku zvětší dvakrát a druhý třikrát. Pak nebudou zřejmě automaticky předpokládat lineární zvětšení obsahu.



Návazná práce

Jako návaznou práci můžeme zadat žákům slovní úlohy, v nichž mají zjišťovat, jak se zvětší obsah nebo objem tělesa při změně jeho rozměrů. Uvedeme jeden námět,⁷³ který může být pro žáky motivační. Pro každou dimenzi jsou dány dvě úlohy, z nichž první se týká úsečky/obdélníku/krychle a druhá jiného útvaru dané dimenze. Výhodou je, že si žáci uvědomí rozdíly ve změnách měr (délky, obsahu, objemu) v různých dimenzích.



Ve světě Liliputánů jsou všechny délky 12krát menší než ve světě Gullivera. Také Liliputáni měří 12krát méně než Gulliver.

1. Gulliverova hůl je 96 cm dlouhá. Jaká je délka příslušné hole Liliputánů? [8 cm]
2. Obvod Gulliverova pasu je 108 cm. Jaký je obvod pasu Liliputána? [9 cm]
3. Gulliverův kapesník má obsah 1 296 cm². Jaký je obsah podobného kapesníku Liliputána? [9 cm², doporučujeme udělat si nákres]
4. Podrážka Gulliverovy boty má obsah 288 cm². Jaký je obsah příslušné podrážky Liliputána? [2 cm²]

⁷³ De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. Springer.

-
5. V Gulliverově světě má krychlička sýra objem $1\,728\text{ mm}^3$. Jaký je objem příslušné krychličky sýra u Liliputánů? [1 mm^3]
 6. V Gulliverově světě má sklenice na víno objem $1\,728\text{ mm}^3$. Jaký je objem podobné sklenice u Liliputánů? [1 cm^3]
-

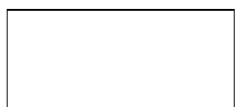
Pracovní list k úloze Moučník



Dáša se ráno rozhodla upéct nějaký moučník. Měla doma obdélníkovou formu o rozměrech 28 cm x 56 cm. V kuchařce našla recept na mrkvový koláč, který ji zaujal. Umíchala těsto, vylila ho do formy a dala péct. Při pečení si všimla, že množství surovin v receptu odpovídalo formě o rozměrech 14 cm x 28 cm. V receptu stálo, že upečený koláč bude vysoký 8 cm. Jak vysoký bude Dášin koláč?

JULIUS

$$V = ?, v = 8 \text{ cm}$$



14

28

28

· 14

112

28

392

$$V = 392 \cdot 8 = 3\,136 \text{ (cm}^3\text{)}$$

56

· 28

448

112

1 568

$$3\,136 = 1\,568 \cdot x$$

$$x = 2 \text{ cm}$$

Zkusím to přes objem koláče.

Podstavou je obdélník. Vypočítám jeho obsah.

Koláč má tvar kvádrů.

Pro objem koláče vynásobím podstavu výškou.

Určím obsah podstavy větší formy.

Výšku koláče v nové formě označím x a vypočítám ji.



Dášin koláč bude vysoký 2 cm.

AIDA

$$28 : 14 = 2$$

$$56 : 28 = 2$$

2. forma 2krát větší

$$S_2 = 2 \cdot S_1$$

$$V_1 = S_1 \cdot 8$$

$$V_2 = S_2 \cdot v_2$$

$$V_1 = V_2$$

$$S_1 \cdot 8 = S_2 \cdot v_2$$

$$S_1 \cdot 8 = 2 \cdot S_1 \cdot v_2$$

$$\frac{8}{2} = v_2$$

$$v_2 = 4$$

$$4 \text{ cm}$$

Všimnu si, že druhá forma je dvakrát větší než první.

Pro objem kvádrů platí, že je roven součinu obsahu podstavy a výšky.

Objem těsta zůstal stejný.

Vyjádřím si neznámou výšku v_2 .

Musí být dvakrát menší než 8.

Takže 8 cm jen vydělím dvěma. Mám výsledek.



Dášin koláč bude vysoký 4 cm.

Metodický list k úloze Test

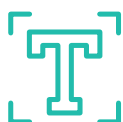
8. a 9. ročník

Téma: celá čísla, rovnice

Test z matematiky obsahoval celkem 10 úloh. Za každou správnou odpověď obdržel žák 3 body a za každou chybnou nebo chybějící odpověď –1 bod. Kolik úloh správně vyřešil Tobiáš, který z testu obdržel 14 bodů?⁷⁴

Úloha má motivační a dobře představitelný kontext. Vyžaduje znalost aditivních operací s celými čísly. Dá se řešit pomocí rovnice, ale také pomocí experimentálního (procesuálního) řešení zachyceného v tabulce. V ní si žáci evidují průběžné stavy tak, aby získali vhled do situace.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Žák obdržel –1 bod. Dokážeš tento úsek slovní úlohy přeformulovat tak, abys odstranil matematické znaménko?

2. Je pro vyřešení úlohy nezbytně nutná informace, že se jednalo o test z matematiky?

3. Kolik bodů dostal žák za částečně správnou odpověď?

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Porovnej podtržené úseky. Obsahují stejné, nebo jiné větné členy? Test z matematiky obsahoval celkem 10 úloh. Matematický test obsahoval celkem 10 úloh.

5. Uveď synonyma ke slovu *obdržel*.

6. Znáš synonymum k zájmenu *který*? V kterém je zájmeno pádě? Proč je důležité znát obě zájmena?

Řešení

(1) Např.: *Za každou chybnou nebo chybějící odpověď pan učitel žákovi strhl jeden bod. Žák přišel o bod. Učitel odečetl jeden bod.* (2) *Není.* (3) *Nevíme, v úloze není řečeno, zda i částečně správná odpověď byla počítána jako chybná.* (4) *Stejně – poprvé podmět (substantivum) a neshodný přívlastek, podruhé podmět (substantivum) a přívlastek shodný; transformační úlohy jsou velmi důležité pro rozvoj stylizačních dovedností.* (5) *Získal, dostal...* (6) *Jenž. S ohledem k stylistické platnosti zájmen jenž a který je užitečné žáky s jejich konkurencí seznámit. V žádném případě však nevyžadujeme skloňovací paradigma, pouze upozorníme, že v budoucnu,*

⁷⁴ Úlohu a řešení fiktivních žáků vytvořil Ondřej Kohout.

až budou žáci psát delší texty (nebo i vytvářet slovní úlohy), obě zájmena s výhodou využijí a je potřeba si správný tvar zájmena *jenž* ověřit. – 1. pád: důležité právě pro vyhledání správného tvaru zájmena *jenž*.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe



Aida vyřešila úlohu pomocí tabulky. Do prvních dvou sloupců zapsala počet správně (OK) a počet chybně (NOK) vyřešených úloh a do třetího sloupce uvedla získané body. Její řešení je procesuální – postupně snižuje počet správných odpovědí, dokud se nedostane k 14 bodům.

Cézar si označil počet správně vyřešených úloh neznámou x a pomocí x vyjádřil body za správné a špatné odpovědi. Nakonec sestavil rovnici, na jejíž levé straně je součet bodů získaných za správné a chybné odpovědi a na pravé straně počet bodů Tobiáše, tedy 14.



Návazná práce

Úlohu můžeme rozšířit a zeptat se žáků, jaké počty bodů by bylo možné obdržet. Nebo je můžeme požádat, aby podobnou úlohu vytvořili pro své spolužáky a řešili ji oběma námi nabízenými způsoby.



Pracovní list k úloze Test



Test z matematiky obsahoval celkem 10 úloh. Za každou správnou odpověď obdržel žák 3 body a za každou chybnou nebo chybějící odpověď -1 bod. Kolik úloh správně vyřešil Tobiáš, který z testu obdržel 14 bodů?

AIDA

Body počítám tak, že počet OK násobím číslem 3 a počet NOK číslem -1.

Udělám si tabulku.

Začnu devíti správnými odpověďmi.

Pak budu tento počet snižovat.

Z tabulky vidím výsledek, 6.

CÉZAR

Kdyby Tobiáš na všechno odpověděl správně, získal by 30 bodů. Musel tedy alespoň jednou odpovědět nesprávně.

Úlohy:

správně x

chybně 10 - x

Body za:

správné 3x

chybné (-1)(10 - x)

Rovnice:

$$3x - 1(10 - x) = 14$$

$$3x + x - 10 = 14$$

$$4x = 24$$

$$x = 6$$

OK správně vyřešené

NOK chybně vyřešené

OK	NOK	Body
9	1	$27 - 1 = 26$
8	2	$24 - 2 = 22$
7	3	$21 - 3 = 20$
6	4	$18 - 4 = 14$

6 OK úloh

Počet správně vyřešených úloh označím jako x.

Body určím tak, že počet správných řešení vynásobím číslem 3 a počet chybných číslem -1.

Sestavím rovnici.

Roznásobím závorku a určím hledané x.

Tobiáš vyřešil správně celkem 6 úloh.

Metodický list k úloze Sud

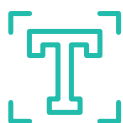
8. a 9. ročník

Téma: procenta, objem, rovnice

Sud s pitnou vodou měl hmotnost 64 kg. Když se z něho první den spotřebovalo 28 % vody a druhý den třetina ze zbytku, byla jeho hmotnost i s vodou 38 kg. Jakou hmotnost má prázdný sud a kolik kilogramů vody v něm původně bylo?⁷⁵

Tato slovní úloha je typická úloha řešitelná rovnicemi. Její struktura je poměrně komplikovaná třemi časovými body (začátek, po prvním odčerpání, po druhém odčerpání) a nutností pracovat v každém z nich s hmotností prázdného sudu, hmotností vody a hmotností sudu s vodou. Vzhled do situace by mohlo žákům poskytnout grafické zobrazení, proto je nabízíme v obou řešeních fiktivních žáků. Doporučujeme, aby ještě před tím, než se žáci s těmito řešeními seznámí, byli požádáni o přehledné zobrazení zadání úlohy (tabulkou, obrázkem). Lépe pak porozumí nabízeným řešením.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Kolik procent vody zbylo v sudu po prvním odčerpání?
2. K čemu se vztahuje slovo *zbytek* ve druhé větě?
3. Nakresli situaci ze zadání úlohy. Vyznač vhodným způsobem změny objemu vody v sudu a nezapomeň na označení klíčových časových bodů.

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Obsahuje text prvky obecné češtiny nebo nářečí?
5.
 - a) V jakém významovém poměru jsou věty v otázce slovní úlohy?
 - b) Lze z tohoto souvětí beze změny významu vytvořit věty jednoduché?

Řešení

(1) 72 % z původního objemu. **(2)** Zbytek vody, který zbyl v sudu po prvním přečerpání. **(3)** Nákres usnadní žákům představu o situaci. Uvědomí si ony tři časové body a změny, k nimž u objemu vody v sudu dochází. Učitel by měl žáky nejdříve nechat, aby se pokusili o vlastní nákresy, i kdyby nebyly správné. **(4)** Ne, text je psán spisovnou češtinou – poučení o rozvrstvení slovní zásoby a využití jazykových prostředků podle funkce jazykového prostředku a záměru mluvčího; typické pro slovní úlohy (pokud žáci sami vytváří slovní úlohy, je

⁷⁵ Běloun, F. et al. (1992, s. 109). *Sbírka úloh z učiva matematiky základní školy*. Dotisk 7. vydání. Prometheus.

to podstatná vědomost). **(5)** a) Poměr slučovací, b) ano: *Jakou hmotnost má prázdný sud? Kolik kilogramů vody v něm původně bylo?*



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

K úloze jsou připraveny dvě dvojice řešení.⁷⁶ Všechna řešení jsou správná.



První dvojice fiktivních žáků využila v řešení nákres. Hektor si nakreslil schematický obrázek sestavený ze tří obdélníků a Manon ze tří úseček. Oba si vyznačili stav vody na začátku, po prvním přelití (zde si už správně uvědomili, že hmotnost zbytku vody bude 72 % původní hmotnosti vody) a po druhém přelití. Z obrázků lze dobře vyčíst algebraický popis hmotnosti vody, z něhož žáci správně sestavili dvě rovnice o dvou neznámých. Soustavu vyřešili sčítací metodou – v řešení není vyznačeno, že druhou rovnici vynásobili číslem -1 .

Ve druhé dvojici je k dispozici řešení Hektora a řešení Xenie. Xenie využila zcela početní řešení, bez pomoci obrázku. Nejdříve určila, kolik kilogramů vody bylo ze sudu spotřebováno. S pomocí zlomků vyjádřila, jaká část z celkového množství byla spotřebována v prvním a druhém dni. Jejich součtem zjistila, jaká část vody v sudu odpovídá 26 kg, a určila velikost celku přes přímou úměrnost. Tím dostala původní hmotnost vody v sudu. Strategie Xenie je zřejmě nejnáročnější na pochopení.

⁷⁶ Na řešení fiktivních žáků se podílel Ondřej Kohout.

Pracovní list 2 k úloze Sud

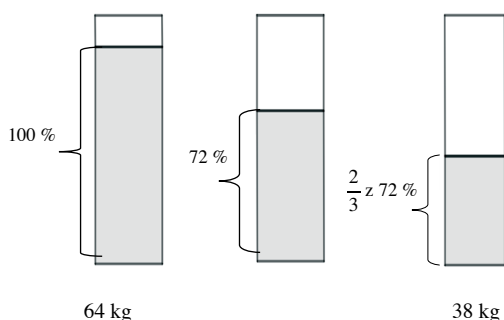


Sud s pitnou vodou měl hmotnost 64 kg. Když se z něho první den spotřebovalo 28 % vody a druhý den třetina ze zbytku, byla jeho hmotnost i s vodou 38 kg. Jakou hmotnost má prázdný sud a kolik kilogramů vody v něm původně bylo?

HEKTOR



Nakreslím si obrázek a vyznačím situaci na začátku, po prvním přelití a po druhém přelití. Po prvním přelití v něm zbyde 72 % vody, která v něm byla na začátku. Po druhém přelití v něm zbydou dvě třetiny toho, co v něm bylo po prvním přelití. Teď už mohu sestavit rovnici.



hmotnost vody po prvním přelití:

$$\frac{72}{100}v = 0,72v$$

hmotnost vody po druhém přelití:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{72}{100}v = \frac{48}{100}v$$

$$\begin{aligned} v + s &= 64 \\ \frac{48}{100}v + s &= 38 \end{aligned}$$

$$\frac{52}{100}v = 26 \rightarrow 52v = 2600$$

$$v = 2600 : 52 = 50$$

Hmotnost vody na začátku si označím v a hmotnost prázdného sudu s.

Prázdný sud měl hmotnost 14 kg a voda v něm 50 kg.

XENIE

$$64 - 38 = 26$$

$$28 \% \text{ je } \frac{28}{100}$$

$$\text{zbylo } 72 \%, \text{ tedy } \frac{72}{100}$$

$$\frac{1}{3} \text{ z } \frac{72}{100} \text{ je}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{72}{100} = \frac{24}{100}$$

$$\frac{28}{100} + \frac{24}{100} = \frac{52}{100}$$

$$\frac{52}{100} \dots\dots\dots 26 \text{ kg}$$

$$1 \dots\dots 26 : \frac{52}{100} \text{ kg}$$

$$26 \cdot \frac{100}{52} = 50 \dots\dots \text{ voda}$$

$$64 - 50 = 14 \dots\dots \text{ sud}$$

Spočítám, kolik vody bylo ze sudu spotřebováno, vyšlo mi 26 kg.

Druhý den spotřebovali třetinu ze zbytku.

Takže 52/100 odpovídá těm 26 kg vody.

Určím jeden celek.

Dopočítám hmotnost sudu.



Metodický list k úloze Sprint

8. a 9. ročník

Téma: úloha o pohybu, zlomky, průměrná rychlost

Jana běžela sprint na 120 m. Při prvním běhu doběhla v čase 24 sekund. Jak dlouho by jí trvalo trať uběhnout, pokud by její tempo v celé první polovině trati bylo o pětinu pomalejší a v celé druhé polovině o pětinu rychlejší než její průměrné tempo při prvním běhu?⁷⁷

Jedná se o úlohu o pohybu, která je komplikována použitím zlomků v roli operátoru. Pro její řešení je nutné pochopení, že průměrná rychlost se počítá jako poměr celkové uražené dráhy ku celkovému času. Jedno z námi nabízených řešení obsahuje častou chybu, a sice zjišťování průměrné rychlosti jako průměru dílčích rychlostí. Dále je nutné si uvědomit, že když Jana běží v první polovině pomaleji a ve druhé rychleji, než bylo její průměrné tempo při prvním běhu, bude jí uběhnutí první poloviny trati trvat delší čas než uběhnutí druhé poloviny trati.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

Rozvoj jazykové gramotnosti

1. Co je to průměrná rychlost?

4. Jakým synonymem bys mohl/a nahradit slovo *tempo*, aby úloha nezměnila význam?

2. Mirka uvažuje takto: *Pokud Jana v druhém běhu první polovinu běží o pětinu pomaleji a ve druhé polovině o pětinu rychleji, než bylo její průměrné tempo při prvním běhu, potom nebude rozdíl mezi prvním a druhým během žádný. Pomalejší a rychlejší pětina se navzájem vyrovnají.* Uvažuje Mirka správně?

5. Podtrhni v úloze přídavná jména v tvaru druhého stupně a doplň vždy první a třetí stupeň těchto přídavných jmen.

6. Ve větě *Jak dlouho by jí trvalo trať uběhnout* najdi podmět.

7. Přepiš text úlohy tak, abys číslovky vyjádřené slovy zapsal/a číslem. Využij všechny pravopisné varianty.

3. Zakresli si obrázek zachycující situaci druhého běhu, o němž se v textu hovoří.

8. Běhá se sprint na 120 m? Připrav si krátký výklad na toto téma.

⁷⁷ Úloha a řešení fiktivních žáků viz práce (Kohout, O. [2021, s. 35.] *Porovnávání strategií při řešení typových slovních úloh*. Bakalářská práce. PedF UK).

Řešení

(1) Celková vzdálenost uražená na celé délce trasy dělená celkovým časem. (2) Ne, tato intuitivní představa neplatí. V první polovině běží pomaleji a tuto ztrátu ve druhé polovině závodu nedožene. To žáci před řešením úlohy nemusí vědět. Jde nám o vytvoření pochybností ohledně této intuice, kterou lze očekávat. (3) Budou-li se žáci snažit o zachycení situace obrázkem, budou získávat do situace lepší vhled a budou lépe připraveni pochopit předložená řešení. (4) Rychlost. (5) Pomalý – pomalejší – nejpomalejší; rychlý – rychlejší – nejrychlejší. (6) Náročnější úloha, v pozici podmětu je infinitiv (*uběhnout* = *by trvalo*). (7) *Sto dvacet, dvacet čtyři / čtyřiadvacet*. (8) Ne, sprint se běhá na 100 metrů; úlohu lze využít jako procvičování výkladu o nějaké atletické disciplíně dle zájmu žáků.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Tristan nejdříve určil průměrnou rychlost na celé trase a poté průměrné rychlosti na obou polovinách trati. Pak si pomohl nákresem a určil, jak dlouho bude Janě trvat uběhnout celou trať. Jeho řešení je správné.



Izolda také nejprve správně určila průměrné rychlosti Jany v obou úsecích, ale následně vycházela z nesprávného předpokladu, že celková průměrná rychlost se zjistí jako průměr dvou dílčích rychlostí.

Pracovní list k úloze Sprint



Jana běžela sprint na 120 m. Při prvním běhu doběhla v čase 24 sekund. Jak dlouho by jí trvalo trať uběhnout, pokud by její tempo v první polovině trati bylo o pětinu pomalejší a ve druhé polovině o pětinu rychlejší než její průměrné tempo při prvním běhu?

TRISTAN

24 s 120 m
1 s 5 m → Průměrné tempo bylo 5 m/s.

1. polovina trati → $\frac{4}{5}$ tempa 4 m/s

2. polovina trati → $\frac{6}{5}$ tempa 6 m/s



1. čas $60 : 4 = 15$ s

2. čas $60 : 6 = 10$ s

Celkový čas = 1. čas + 2. čas = 15 s + 10 s = 25 s.

Jana by uběhla trať o délce 120 metrů za 25 sekund.



Nejdříve určím, jakým průměrným tempem Jana běžela.

Ted' vypočítám, jakým tempem by Jana běžela v první a druhé polovině trati.

Nakreslím si obrázek.

Určím, jak dlouho běžela Jana každý z úseků.

Pak tyto časy sečtu.

Tempo:

$$120 : 24 = 5$$

1. polovina trati → $\frac{4}{5}$ tempa 4 m/s = v_1

2. polovina trati → $\frac{6}{5}$ tempa 6 m/s = v_2



$$\text{průměrné tempo } v = \frac{v_1 + v_2}{2} = 5 \text{ m/s}$$

Dráha:

$$s = 120 \text{ m}$$

Čas:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{120 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 24 \text{ s}$$

Jana by uběhla trať o délce 120 metrů za 24 sekund.



IZOLDA

Nejdřív určím, jakým tempem by Jana běžela každý z úseků.

Z obou temp vypočítám průměrné tempo.

Ted' mi už jen zbývá vypočítat, jak dlouho by Janě při tomto tempu trvalo trať uběhnout.

Tento čas určím jako podíl dráhy a tempa.

Metodický list k úloze Utrácení

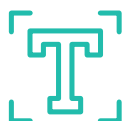
8. a 9. ročník

Téma: rozdělení celku na části, rovnice

Xénie a Drahomíra mají dohromady 520 Kč. Pokud Xénie utratí $\frac{2}{5}$ svých peněz a Drahomíra utratí 40 Kč, pak jim zbyde stejná suma peněz. Kolik korun má Xénie?⁷⁸

Úlohy podobného typu se běžně zařazují do výuky matematiky jako úlohy na sestavení a řešení rovnic. Úlohy zaměřené na rozdělování celku na nestejně části se však dají řešit i pomocí nákresu (vizualizace pomocí úsečkového diagramu, viz také úlohy POR16 až POR20). Z diagramu se dá jednak vyčíst přímo řešení (a sestavení rovnice pak není nutné), nebo se dá použít pro získání vhledu do struktury úlohy, který usnadní sestavení rovnice. Právě na to cílí námi nabízená řešení. Doporučujeme, aby učitel nejdříve žáky požádal, aby si situaci sami zkusili zachytit nějakým nákresem (pokud už používali nebo viděli úsečkové diagramy, může je požádat o vytvoření tohoto diagramu). To jim později umožní lépe pochopit nabízená řešení.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Které tvrzení vyplývá z úlohy:
 - a) Xénie a Drahomíra mají každá 260 korun.
 - b) Xénie a Drahomíra utratí obě 40 korun.
 - c) Xénii zbydou $\frac{3}{5}$ jejích peněz.
 - d) Xénii zbydou $\frac{3}{5}$ peněz obou děvčat.

2. Je jasně řečeno, z jakých peněz utratí Drahomíra 40 Kč?

3. Ptá se otázka na počáteční stav peněz obou dívek, nebo na stav peněz po (hypotetické) útratě?

Rozvoj jazykové gramotnosti

5. Ve slovní úloze se neříká, kdo jsou Xénie a Drahomíra. Obohaťte proto první větu úlohy o alespoň dvě příslovečná určení, alespoň dva neshodné přívlastky, alespoň dva shodné přívlastky, vedlejší větu.

6. Nahraď spojku *pokud* tak, aby smysl otázky zůstal zachován. Ve slovníku najdi charakteristiku jazykových prostředků, které jsi použil/a.

⁷⁸ Vytvořeno podle (Kho, T. H., Yeo, S.M., & Fan, L. [2014, s. 278]. Model method in Singapore primary mathematics textbooks. In *Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT-2014)* (pp. 275–282). University of Southampton).

4. Lze obrátit větosled prvních dvou vět v části *Pokud Xénie utratí 2/5 svých peněz a Drahomíra utratí 40 Kč, pak jim zbyde stejná suma peněz?* Proč?

7. V které jazykové památce se objevuje významná historická postava Drahomíra?

Řešení

(1) a) Ne, b) ne c) ano, d) ne. (2) Ne, v textu to není řečeno, je třeba si dovodit, že to budou její vlastní úspory. (3) Na počáteční stav. Žáci si musí uvědomit, že v úloze se jedná o dva časové body: začátek a stav po případném utrácení. (4) Ano, jedná se slučovací poměr, pořadí vět nemá vliv na řešení úlohy. (5) Např.: *Naše spoluhráčky z Vršovíc Xénie a Drahomíra, které jsme viděli dnes při plánování občerstvení na zápas, mají dohromady 520 Kč.* (6) *Jestliže, pakliže, až, když...* (7) Legendy o svatém Václavu, Kronika tak řečeného Dalimila a podobně, Drahomíra ze Stodor.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

K úloze jsou připravena tři různá (správná) řešení.



V první dvojici je řešení Olafa a Elzy. Olaf řešil úlohu pomocí sestavení dvou rovnic o dvou neznámých. Soustavu řešil dosazovací metodou.

Elzino řešení je založeno na vizualizaci situace úsečkovým diagramem. Na jeho základu udělala úvahu, z níž už řešení přímo plyne.

Řešení ve druhé dvojici jsou obě za pomoci úsečkového diagramu. Jedno z nich je Elzino a druhé je Bivoje. Oba fiktivní žáci si vytvořili stejný úsečkový diagram, ale Bivoj na rozdíl od Elzy na jeho základě sestavil lineární rovnici. Žáci by si měli uvědomit, že obě řešení jsou ekvivalentní a že Elzina úvaha vlastně odpovídá významu lineární rovnice Bivoje. Současně žáci uvidí, že úsečkový diagram lze využít i jako pomoc při sestavení rovnice.

Pracovní list 1 k úloze Utrácení



Xénie a Drahomíra mají dohromady 520 Kč. Pokud Xénie utratí $\frac{2}{5}$ svých peněz a Drahomíra utratí 40 Kč, pak jim zbyde stejná suma peněz. Kolik korun má Xénie?

OLAF

Takovéhle slovní úlohy znám, ty se řeší rovnicí.

Označím si neznámé. První rovnice je jasná, mají dohromady 520 Kč.

Když Xénie utratí dvě pětiny svých peněz, zbydou jí tři pětiny. Drahomíra utratila 40 Kč.

x – původní částka Xénie
 y – původní částka Drahomíry

$$\begin{aligned}x + y &= 520 \\ \frac{3}{5}x &= y - 40\end{aligned}$$



Soustavu rovnic o dvou neznámých budu řešit dosazovací metodou. Vyjádřím si y z druhé rovnice a dosadím do první rovnice.

$$\begin{aligned}y &= 520 - x \\ \frac{3}{5}x &= 520 - x - 40 \\ \hline \frac{8}{5}x &= 480 \\ x &= \frac{480 \cdot 5}{8} = 300 \\ y &= 520 - 300 = 220\end{aligned}$$

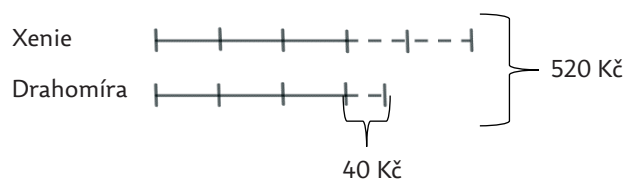
Xénie má 300 Kč
a Drahomíra 220 Kč.

ELZA



Já si zadání úlohy nejdříve nakreslím.

Peníze Xénie si vyjádřím úsečkou rozdělenou do pěti stejných částí a v ní vyznačím přerušovaně dvě pětiny, které utratí.



Druhá úsečka značí peníze Drahomíry. Ta utratí 40 Kč, které si vyznačím přerušovaně. To, co jí zbyde, musí být stejné jako ty tři pětiny peněz Xénie.

Z obrázku vidím, že když odečtu od 520 Kč těch 40 Kč, tak ten zbytek budu dělit na osm částí.

Z toho pět měla na začátku Xénie a tři Drahomíra. Já ale musím ještě připočíst těch 40 Kč.

$$\begin{aligned}520 - 40 &= 480 \\ 480 : 8 &= 60 \\ \text{Xenie: } 5 \cdot 60 &= 300 \\ \text{Drahomíra: } 3 \cdot 60 + 40 &= 220\end{aligned}$$

Pracovní list 2 k úloze Utrácení

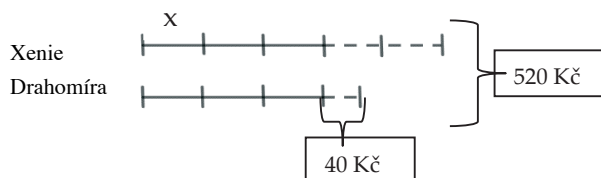


Xénie a Drahomíra mají dohromady 520 Kč. Pokud Xénie utratí $\frac{2}{5}$ svých peněz a Drahomíra utratí 40 Kč, pak jim zbyde stejná suma peněz. Kolik korun má Xénie?

Já si zadání úlohy nejdříve nakreslím.
Peníze Xénie si vyjádřím úsečkou rozdělenou do pěti stejných částí a v ní vyznačím přerušovaně dvě pětiny, které utratí.



BIVOJ



Tu jednu pětinu částky Xénie si označím x.
Obrázek mi pomůže sestavit rovnici.
Tu vyřeším.

Mám výsledek pro tu jednu pětinu a opět z obrázku už lehce najdu částku Xénie i Drahomíry.

$$8x + 40 = 520$$

$$8x = 520 - 40$$

$$8x = 480$$

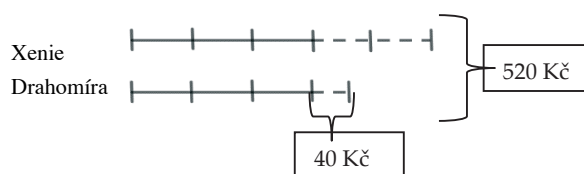
$$x = 60$$

$$\text{Xenie: } 5 \cdot 60 = 300$$

$$\text{Drahomíra: } 3 \cdot 60 + 40 = 220$$

Xénie má 300 Kč
a Drahomíra 220 Kč.

ELZA



Druhá úsečka značí peníze Drahomíry. Ta utratí 40 Kč, které si vyznačím přerušovaně. To, co jí zbyde, musí být stejné jako ty tři pětiny peněz Xénie.

Z obrázku vidím, že když odečtu od 520 Kč těch 40 Kč, tak ten zbytek budu dělit na osm částí.

Z toho pět měla na začátku Xénie a tři Drahomíra. Jí ale musím ještě připočíst těch 40 Kč.

$$520 - 40 = 480$$

$$480 : 8 = 60$$

$$\text{Xenie: } 5 \cdot 60 = 300$$

$$\text{Drahomíra: } 3 \cdot 60 + 40 = 220$$

Metodický list k úloze Rekord

8. a 9. ročník

Téma: rovnice, společná práce

Anita, Berta a Cilka se rozhodly, že společně překonají rekord tří spolužáků v počtu dřepů za minutu. Každá z nich má jiné tempo. Anita zvládne udělat 1 dřep za sekundu, Berta 5 dřepů za 6 sekund a Cilka 2 dřepy za 3 sekundy. Za jak dlouho kamarádky společně udělají 120 dřepů, což byl dosavadní rekord spolužáků, za předpokladu, že budou schopny dodržet své tempo?⁷⁹

Tato slovní úloha patří do skupiny úloh o společné práci. Ty se zpravidla řeší tabulkou a sestavením rovnice. Ovšem tato úloha se dá řešit i úvahou, na což chceme žáky upozornit jedním z nabídnutých řešení.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Které tvrzení odpovídá slovní úloze?
 - a) Každá z dívek udělala 120 dřepů.
 - b) Anita udělala 60 dřepů.
 - c) Anita má ze všech dětí nejrychlejší tempo.

2. Jak dlouho spolužákům dívek trvalo udělat 120 dřepů?

3. Přeformuluj úlohu tak, aby obsahovala jen informace, které potřebuješ k vyřešení úlohy.

4. Je ve vaší třídě někdo, kdo dokáže 60 dřepů za minutu? Pokud nikoliv, dokážeš úlohu sestavit podle skutečných výkonů (svých nebo spolužáků)?

Rozvoj jazykové gramotnosti

5.
 - a) Jak říkáme lidem, kteří jsou držiteli nějakého sportovního rekordu nebo dosáhli rekordu v nějakém sportu?
 - b) Znáš nějaké další slovo, které se z hlediska slovo tvorby podobá slovu z úkolu a)?

6. Přeformuluj první větu tak, aby v přísudku bylo měkké -i.

7. Posuď, kdy spíše užiješ slova *sekunda* a kdy spíše jeho synonyma.

8. Objasni podle slovníku význam slova *rekord*. Vytvoř přídavné jméno. Vytvoř větu, ve které bude toto přídavné jméno přívlastkem.

⁷⁹ Úloha a řešení fiktivních žáků byly vytvořeny na základě práce (Kohout, O. [2021, s. 38.] *Porovnávání strategií při řešení typových slovních úloh*. Bakalářská práce. PedF UK).

9. Pracuj s etymologickým slovníkem. Z jakého jazyka pochází slovo *rekord* a co původně znamenalo?

Řešení

(1) Žádné: a) není řečeno, že by každá z dívek udělala 120 dřepů, b) Anita sice udělá jeden dřep za sekundu, ale není řečeno, že by cvičila celou minutu, c) nelze posoudit, protože úloha neuvádí, jaké tempo měli jednotliví chlapci. (2) Za minutu. Žáci to musí zjistit z první věty. (3) Anita zvládne udělat 1 dřep za sekundu, Berta 5 dřepů za 6 sekund a Cilka 2 dřepy za 3 sekundy. Za jak dlouho udělají společně 120 dřepů za předpokladu, že budou schopny dodržet své tempo? (4) Je to nepravděpodobné – takový výkon se obvykle očekává od profesionálního sportovce. (5) a) Rekordman; b) *Superman*, *gólman*, *sportsman* apod. (6) Např. *Honza*, *Anita*, *Berta* a *Cilka* se rozhodli... (7) *Sekunda* – v odborných textech, *vteřina* – v neoborných textech. (8) *Rekord*, -u 1. mimořádný n. nejlepší výkon, výsledek 2. sport. nejlepší měřitelný výkon dosažený v urč. disciplíně podle příslušných pravidel; rekordní příd.; např. *rekordní návštěvnost*.⁸⁰ (9) Z angličtiny, záznam, zápis.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Olaf určil pro každou z dívek zvlášť, kolik udělají dřepů za sekundu. Pak úlohu řešil způsobem, který je běžný u úloh na společnou práci. Sestavil rovnici s neznámou x , která označuje celkový čas, který budou dívky k vykonání 120 dřepů potřebovat.



Naproti tomu Elza použila úvahu. Uvědomila si, že dokáže zjistit, kolik dřepů udělají všechny dívky za 6 sekund (každá zvlášť, a tedy i dohromady). Dospěla k tomu, že za 6 sekund udělají 15 dřepů. Těchto 15 dřepů se do požadovaných 120 vejde osmkrát. Z toho již Elza lehce vypočítala správný výsledek. Elzina úvaha je však možná jen tehdy, pokud jsou zadána vhodná čísla (číslo 6 je násobkem 1 i 3). Žáky můžeme požádat, aby určili čísla, pro něž bude Elzino řešení fungovat, a jiná čísla, pro která fungovat nebude.

⁸⁰ Petráčková, V., Kraus, J. et al. (1997). *Akademický slovník cizích slov*. Academia.

Pracovní list k úloze Rekord



Anita, Berta a Cilka se rozhodly, že společně překonají rekord tří spolužáků v počtu dřepů za minutu. Každá z nich má jiné tempo. Anita zvládne udělat 1 dřep za sekundu, Berta 5 dřepů za 6 sekund a Cilka 2 dřepy za 3 sekundy. Za jak dlouho kamarádky společně udělají 120 dřepů, což byl dosavadní rekord spolužáků, za předpokladu, že budou schopny dodržet své tempo?

OLAF

Úlohu budu řešit rovnicí.

U každé z dívek si proto nejprve vyjádřím její výkon. Tedy kolik dřepů dokáže udělat za 1 sekundu.



Například Berta udělá 5 dřepů za 6 sekund, tak za 1 sekundu udělá 5/6 dřepu.

Celková „práce“, kterou mají dívky vykonat, je 120 dřepů. Čas, který k tomu budou potřebovat, označím x.

Nyní dosadím výkony dívek do rovnice o společné práci s neznámou x.

Z rovnice vyjádřím neznámý čas x.

Mám výsledek.

Anita: 1 dřep za 1 sekundu
Berta: $\frac{5}{6}$ dřepu za sekundu
Cilka: $\frac{2}{3}$ dřepu za sekundu

práce120 dřepů
čas x sekund

$$1x + \frac{5}{6}x + \frac{2}{3}x = 120$$

$$\frac{6x + 5x + 4x}{6} = 120$$

$$\frac{15x}{6} = 120$$

$$15x = 720$$

$$x = \frac{720}{15} = 48$$

ELZA

Ze zadání vidím, že dokážu zjistit, kolik dřepů udělá každá z dívek za 6 sekund.



Anita: 6 dřepů za 6 sekund

Berta: 5 dřepů za 6 sekund

Cilka: 4 dřepy za 6 sekund

Dohromady: 15 dřepů za 6 sekund

Holky musí udělat 120 dřepů. Těch 15 dřepů se do 120 vejde 8krát.

$$120 : 15 = 8$$

Takže jim to celé bude trvat 48 sekund.

$$8 \cdot 6 = 48$$

Kamarádky udělají 120 dřepů za 48 sekund.

Metodický list k úloze Směs

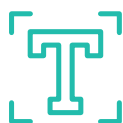
9. ročník

Téma: úloha o směsi, rovnice/soustava rovnic

Petra a Nela jezdí každý rok na prázdninový příměstský tábor u koní. Letos dobrovolně přispěly také na zatravnění areálu. Zaplatily 2 200 Kč za 28 kilogramů travní směsi, která se skládá z vojtěšky a jetele. Jeden kilogram vojtěšky stál 90 Kč a jeden kilogram jetele 50 Kč. Z kolika kilogramů vojtěšky a z kolika kilogramů jetele byla směs smíchána?

Jedná se o typovou úlohu na směsi, jež jsou pro žáky obtížné. Řeší se zpravidla soustavou rovnic. Pokud žáky vyzveme, aby vytvořili několik odhadů a zkontrolovali jejich správnost, získají vhled do struktury úlohy a mohou lépe pochopit, jak rovnice sestavit. Úloha v mírně jiné verzi (čísla byla stejná) byla v našem výzkumu⁸¹ řešena žáky 9. ročníku s úspěšností 57 %. Při porovnání námi nabízených způsobů řešení v pracovním listu si žáci upevní poznatek, že zápis zadání úlohy lze udělat různě, že značení neznámých nemá na řešení vliv a že soustavu rovnic můžeme řešit různým způsobem.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Dokážeš situaci nějak nakreslit?
2. Podtrhni v textu úlohy zeleně úseky, které potřebuješ, a červeně úseky, které nepotřebuješ znát pro vyřešení slovní úlohy.
3. Zkus odhadnout, kolik kilogramů vojtěšky a jetele dívky asi koupily. Udělej si tabulku a doplň několik konkrétních možností pro vojtěšku a jetel a zjisti celkovou cenu.
4. U úkolu 3 jsi zapsal/a několik výpočtů. Dokážeš je napsat obecněji?

Rozvoj jazykové gramotnosti

5. Časové určení v první větě vyjádři jednoslovně. O jaký slovní druh se jedná?
6. Urči slovní druh slova *zatravnění*.
7. Urči slovo významem nadřazené slovům *vojtěška* a *jetel*.
8. Ze souvětí *Zaplatily 2 200 Kč za 28 kilogramů travní směsi, která se skládá z vojtěšky a jetele* vytvoř větu jednoduchou. Význam musí být zachován.
9. Najdi názvy dvou nejběžnějších jetelů rostoucích v České republice. Čím je zvláštní přívlastek v jejich názvu?

⁸¹ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 85). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.

Řešení

(1) Otevřený úkol. (2) Petra a Nela jezdí každý rok na prázdninový příměstský tábor u koní. Letos dobrovolně přispěly také na zatravnění areálu. Zaplatily 2 200 Kč za 28 kilogramů travní směsi, která se skládá z vojtešky a jetele. Jeden kilogram vojtešky stál 90 Kč a jeden kilogram jetele 50 Kč. Z kolika kilogramů vojtešky a z kolika kilogramů jetele byla směs smíchána? (3) Např. 10 kg vojtešky a 18 kg jetele bude stát $10 \cdot 90 + 18 \cdot 50 = 1\,800$ Kč, což je málo; dáme více vojtešky, protože je dražší; např. 15 kg vojtešky a 13 kg jetele by stálo $15 \cdot 90 + 13 \cdot 50 = 2\,000$ Kč. (4) Jde nám o zápis typu $x \cdot 90 + y \cdot 50$ nebo $x \cdot 90 + (28 - x) \cdot 50$, který žákům usnadní tvorbu rovnice; je možné, že u úkolu 3 budou žáci psát výpočet ve dvou částech (např. $10 \cdot 90$, $18 \cdot 50$); v takovém případě je vedeme k tomu, aby nejdříve spojili do jednoho výpočtu tyto konkrétní součiny, než je vyzveme k obecnému zápisu. (5) Každoročně – příslovce. (6) Podstatné jméno. (7) Bylina (u některých druhů pícnina); předpokládá se práce se slovníkem. (8) Zaplatily 2 200 Kč za 28 kilogramů travní směsi skládající se z vojtešky a jetele. (9) Předpokládá se práce s encyklopedií – domácí práce. Jetel luční, jetel plazivý atd. Ačkoliv se jedná o přívlastek shodný, stojí v postpozici (za jménem). To je typické pro chemické a přírodovědné termíny (liška obecná, kyselina sírová, růže málokvětá). Lze rozvíjet myšlenku, že obecná liška, sírová kyselina atd. se nepoužívá a zní to komicky.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Pracovní list obsahuje dvě správné strategie lišící se způsobem tvorby legendy (zápisu slovní úlohy). Zatímco Izolda si napsala „klasický“ slovní zápis, Tristan si vytvořil tabulku.



Oba žáci sestavili soustavu správně, pouze si každý z nich jinak označil neznámé počty kilogramů. Žáci by měli být schopni pochopit, jak obě soustavy vznikly a proč se liší. Izolda použila pro řešení soustavy rovnic sčítací metodu a Tristan dosazovací.

Je pravděpodobné, že žáci přijdou ještě s jinou strategií řešení úlohy. V takovém případě by měli být vyzváni, aby ji představili a porovnali s předloženými řešeními.



Návazná práce

Jeví se nám jako žádoucí podpořit žáky v používání tabulky jako nástroje pro získání vhledu do situace. Učitel může vybrat libovolnou úlohu na směsi a požádat žáky, aby tabulku tvořili. K tvorbě tabulky u úloh o směších vedou i mnohé učebnice matematiky.



Pracovní list k úloze Směs (první část)



Petra a Nela jezdí každý rok na prázdninový příměstský tábor u koní. Letos dobrovolně přispěly také na zatravnění areálu. Zaplatily 2 200 Kč za 28 kilogramů travní směsi, která se skládá z vojtěšky a jetele. Jeden kilogram vojtěšky stál 90 Kč a jeden kilogram jetele 50 Kč. Z kolika kilogramů vojtěšky a z kolika kilogramů jetele byla směs smíchána?

IZOLDA

Ze zadání znám cenu vojtěšky a jetele za 1 kg. Mám zjistit, kolik kg směsi je tvořeno jetelem a kolik vojtěškou.

Počet kilogramů vojtěšky a jetele označím po řadě x , y .



cena vojtěšky..... 90 Kč/kg
cena jetele..... 50 Kč/kg

počet kg vojtěšky..... x
počet kg jetele..... y $\rightarrow$ 28 kg

částka za vojtěšku..... $90x$
částka za jetel..... $50y$ $\rightarrow$ 2 200 Kč

Pokud za 1 kg vojtěšky zaplatím 90 Kč, pak za x kg zaplatím $90x$ Kč. Obdobně s jetelem.

Znám hmotnost směsi a její cenu. Podle zápisu sestavím soustavu rovnic.



$$x + y = 28$$

$$90x + 50y = 2\,200$$

TRISTAN

Já si radši vytvořím přehlednou tabulku a soustavu sestavím podle ní. Bude mít dva sloupce. Jeden se týká hmotností a druhý cen.

Počet kilogramů jetele a vojtěšky si označím po řadě x , y .



	kg	Kč
jetel	x	$50x$
vojtěška	y	$90y$
celkem	28	2 200

Počty kilogramů jetele a vojtěšky musí dát dohromady 28 kg. Stejně tak je tomu s cenami, ty musí dát 2 200 Kč.

Proto vezmu sloupce tabulky a sestavím podle nich soustavu dvou rovnic.



$$x + y = 28$$

$$50x + 90y = 2\,200$$

Pracovní list k úloze Směs (druhá část)



IZOLDA

První rovnici vynásobím
-50, aby měly koeficienty
před neznámou y opačné
znaménko.

Rovnice spolu poté sečtu.



$$(x + y) = 28 \quad | \cdot (-50)$$

$$90x + 50y = 2\,200$$

$$-50x - 50y = -1\,400$$

$$90x + 50y = 2\,200$$

Zůstane mi neznámá x.
Z první rovnice dopočítám
neznámou y.



$$40x = 800 \quad | : 40$$

$$x = 20$$

$$y = 28 - x = 28 - 20 = 8$$

$$y = 8$$

$$x = 20$$

TRISTAN

Z první rovnice si vyjádřím
neznámou x.

K tomu obě strany druhé
rovnice vydělím číslem 10,
abych nepočítal s tak
velkými čísly.



$$x + y = 28 \rightarrow x = 28 - y$$

$$5x + 9y = 220$$

$$5(28 - y) + 9y = 220$$

$$140 - 5y + 9y = 220$$

Dosadím do druhé rovnice
za neznámou x. Zůstane mi
neznámá y.

Dopočítám neznámou x.



$$4y + 140 = 220 \quad | - 140$$

$$4y = 80 \quad | : 4$$

$$y = 20 ; x = 28 - 20 = 8$$

$$x = 8$$

$$y = 20$$

Směs byla smíchána z 20 kg
vojtěšky a 8 kg jetele.

Metodický list k úloze Borůvky

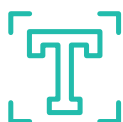
9. ročník

Téma: úloha o společné práci, převody jednotek času

Anežka nasbírá kyblík borůvek za dvě hodiny. Pepa naplní stejně velký kyblík za tři hodiny. Za jak dlouho by naplnili až po okraj jeden kyblík společně?⁸²

Jedná se o úlohu typu společná práce, která je pro žáky zpravidla obtížná a dopouštějí se v jejím řešení častých chyb. Žáci se je učí řešit pomocí sestavení rovnic. Jako u mnohých slovních úloh v matematice musíme přijmout předpoklad, že obě děti sbírají stále stejně rychle. V matematickém diskurzu je častým jevem, že má slovní úloha zamlčené předpoklady, protože popisuje realitu zjednodušeně a některé faktory se musí zanedbat. Domníváme se, že o těchto předpokladech je třeba s žáky hovořit.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1.
 - a) Kdo sbírá borůvky do kyblíku rychleji? Anežka, nebo Pepa?
 - b) Sbírají děti stále stejně rychle, anebo občas zpomalí nebo zrychlí? Přemýšlejte, jak asi situace vypadá ve skutečnosti a jak je zachycena ve slovní úloze.
2. Co by se stalo, kdyby Anežka zrychlila práci?
3. Úlohu jsme přeformulovali. Porovnej ji s původní verzí a vysvětli, v čem spočívají jazykové odlišnosti: *Anežka je schopná (dokáže) nasbírat kyblík borůvek za dvě hodiny. Pepa je schopen (dokáže) nasbírat stejně velký kyblík za tři hodiny. Za jak dlouho nasbírají borůvky do jednoho kyblíku, pokud budou pracovat společně?*

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Posuď stylistickou platnost slova *kyblík* a pokus se najít k němu synonymum.
5. Za pomoci etymologického slovníku urči původ slova *kyblík*.
6. Z prvních dvou vět úlohy vytvoř a) souvětí souřadné, b) souvětí podřadné. Posuď stylistickou platnost nově vzniklých souvětí.
7. V první větě najdi shodný přívlastek.

⁸² Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 85). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.

Řešení

(1) a) Anežka, b) zamlčený předpoklad je, že sbírají stále stejným tempem. (2) Nasbírala by kyblík rychleji a i obě děti společně by kyblík nasbíraly rychleji než v tomto zadání. (3) Zatímco originální znění odkazuje k nějakému ději (*Anežka nasbírá, Pepa naplní*), reformulace odkazuje ke schopnosti naplnit nádobu za určitou dobu. To je údaj, který pro vyřešení slovní úlohy potřebujeme znát. Kondicionál v otázce úlohy není vadou, ale odkazuje k potenciálnímu ději, informace „až po okraj“ je redundantní, protože se s ní dříve nepracuje. *Nasbírat kyblík* je metonymie – nejedná se o stylistickou závadu, ale je vhodné na ni žáky upozornit; Žáci pravděpodobně posoudí obě zadání (původní krátké a přeformulované) jako stejně srozumitelná. Nuance spočívá v tom, že původní řešení vypadá jako reálné, druhé jako budoucí činnost s odhadem výkonu. (4) *Kbelík*; žáci mohou uvádět výrazy *nádoba, košík, džbán, konvice, hrneček* – z hlediska činnosti mají stejný význam, z pohledu jazykové třeba o synonymii vést diskusi. (5) *Kyblík*: „z němčiny, konkrétně kýbl, ob. (obecněčeské), kyblík, kyblíček. Z něm. Kübel“.⁸³ (6) Např. souřadné: *Anežka nasbírá kyblík borůvek za dvě hodiny a Pepa naplní stejně velký kyblík za tři hodiny*. Podřadné: *Zatímco Anežka nasbírá kyblík borůvek za dvě hodiny, Pepa naplní stejně velký kyblík za tři hodiny*. *Anežka nasbírá kyblík borůvek za dvě hodiny, kdežto Pepa naplní stejně velký kyblík za tři hodiny*. Přestože *Anežka nasbírá kyblík borůvek za dvě hodiny, Pepa naplní stejně velký kyblík za tři hodiny*. Podřadné souvětí významově přesněji popisuje okolnosti než spojení dvou vět hlavních parataktickou spojkou *a* ve slučovacím poměru. (7) *Dvě*, jedná se o přívlastek vyjádřený číslovkou; pokud budou žáci uvádět slovo *borůvek*, je třeba zopakovat poučení o shodném a neshodném přívlastku



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Elzino řešení je správné.⁸⁴ Úlohu řešila rovnicí, v níž za neznámou zvolila čas, za který obě děti společně nasbírají jeden kyblík. Rovnice vyjadřuje výkony obou aktérů za jednu hodinu.



Olaf nejprve sečetl časy, za něž nasbírají Anežka i Pepa každý jeden kyblík. V jeho řešení nepracují obě děti současně, ale jedno po druhém, a proto je jeho řešení chybné. Na chybu by ho bývala mohla upozornit sémantická zkouška – v Olafově řešení by práce oběma dětem společně trvala déle než Anežce samotné.

⁸³ Rejzek, J. (2001, s. 327). *Český etymologický slovník*. Leda.

⁸⁴ Řešení fiktivních žáků viz práce (Kohout, O. [2021, s. 40.] *Porovnávání strategií při řešení typových slovních úloh*. Bakalářská práce. PedF UK).

Pracovní list k úloze Borůvky



Anežka nasbírání kyblík borůvek za dvě hodiny. Pepa naplní stejně velký kyblík za tři hodiny. Za jak dlouho by naplnili až po okraj jeden kyblík společně?

OLAF

Ze zadání vím, že stejně velký kyblík nasbírání Anežka za 2 hodiny a Pepa za 3 hodiny.

Tedy oba časy sečtu.



A 2 h

P 3 h

$$3 + 2 = 5$$

5 hodin – společně 2 kyblíky

Za 5 hodin by společně nasbírali 2 kyblíky.

Zajímá mě ale 1 kyblík, proto vydělím dvěma.

Mám výsledek.



$$5 : 2 = 2,5$$

2,5 hodiny – 1 kyblík společně

Společně by jeden kyblík naplnili za 2,5 hodiny.

ELZA

Čas, který budou společně Anežka s Pepou potřebovat k naplnění jednoho kyblíku, označím x.



1 kyblík:

Anežka 2 h

Pepa 3 h

společně x h

Anežka tedy naplní za hodinu polovinu a Pepa třetinu kyblíku.

Vytvořím rovnici s neznámou x.

Zbavím se zlomků a určím hodnotu x.

Nakonec převedu čas na hodiny a minuty.

1 hodina:

Anežka $\frac{1}{2}$ kyblíku

Pepa $\frac{1}{3}$ kyblíku

$$x \cdot \frac{1}{2} + x \cdot \frac{1}{3} = 1 \quad | \cdot 6$$

$$3x + 2x = 6$$

$$5x = 6 \quad | :5$$

$$x = \frac{6}{5}$$

$$\frac{6}{5} \cdot 60 = 6 \cdot 12 = 72$$

72 min = 1 h 12 min

Kyblík by naplnili za 1 h 12 min.

Metodický list k úloze Brigáda

9. ročník

Téma: úloha o společné práci,
úloha s antisignálem

Uršula s Vilémem si o prázdninách po 9. ročníku našli na zkrácený úvazek letní brigádu ve fabrice. Práce to byla sice jednotvárná, ale na druhou stranu dobře placená. Jejich úkolem bylo kontrolovat součástky. Vilém za hodinu dokázal zkontrolovat 30 součástek, což bylo 1,5krát víc, než dokázala za stejný čas Uršula. Jak dlouho by oběma trvalo zkontrolovat všech 300 součástek, které jim z výroby přivezli?⁸⁵

Jedná se o úlohu o společné práci, kterou žáci obvykle řeší sestavením rovnice. Dá se však řešit i úvahou, na což upozorňujeme jedním z předložených řešení fiktivních žáků. Úloha je komplikována přítomností antisignálu – „1,5krát víc“ navozuje násobení, ale správně je při řešení úlohy dělení. U žáků, kteří mají tendenci použít strategii signálních slov, by tento fakt mohl vést k nesprávnému řešení.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Kdo kontroloval součástky rychleji? Uršula, nebo Vilém?
2. Posuď slovní úlohu z hlediska časové návaznosti a přeformuluj ji.
3. Vyplývá z textu zcela jednoznačně, že Uršula a Vilém mají kontrolovat 300 součástek společně?

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Vysvětlí svými slovy význam slova *brigáda* a *fabrika*.
5. Posuď stylistické oprávnění podmiňovacího způsobu v otázce slovní úlohy.
6. Změní se větný člen *ve fabrice*, pokud první větu přeformulujeme takto: *Uršula s Vilémem si ve fabrice našli letní brigádu*? Která z formulací je vhodnější?
7. Najdi v textu slova cizího původu a podle etymologického slovníku urči, z kterého jazyka byla převzata.

⁸⁵ Úloha i řešení fiktivních žáků byly vytvořeny na základě práce (Kohout, O. [2021, s. 42.] *Porovnávání strategií při řešení typových slovních úloh*. Bakalářská práce. PedF UK).

Řešení

(1) Vilém. (2) Uršula s Vilémem si našli letní brigádu ve fabrice. Jejich úkolem bylo kontrolovat součástky. Ke kontrole jim z výroby přivezli 300 součástek. Vilém za hodinu dokázal zkontrolovat 30 součástek, což bylo 1,5krát víc, než dokázala za stejný čas Uršula. Jak dlouho by oběma trvalo zkontrolovat všech 300 součástek? (3) Z úlohy to není zcela jasné, přesnější formulace: Za jak dlouho zkontrolují všech 300 součástek společně? (stylizační cvičení). (4) Krátkodobá práce/výpomoc; továrna, objekt, kde se něco vyrábí. (5) Podmiňovací způsob zde z hlediska významu není namístě, protože otevírá možnost interpretaci, že Uršula s Vilémem úkol nedokončí. Vhodněji: Za jak dlouho zkontrolují všech 300 součástek? (6) Původně: přívlastek neshodný, po reformulaci příslovcové určení místa; vhodnější je původní formulace, neboť důraz je položen na posledním slově, tedy ve fabrice (vhodnější i s ohledem k pokračování textu, možno elementárně poučit žáky 9. ročníku o aktuálním členění výpovědi). (7) Brigáda, fabrika, ale např. i kontrola (dnes už nepociťujeme, viz etymologický slovník – poučení o adaptovaných přejímkách, obecné poznatky o jazyce – vývoj jazyka).



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe



Elza správně interpretovala spojení „1,5krát víc“ (antisignál) a vydělila 30 číslem 1,5, aby zjistila, kolik součástek zkontroluje Uršula. Poté určila, kolik součástek zkontrolují za jednu hodinu společně, a následně jednoduchým výpočtem zjistila, jak dlouho jim bude trvat 300 součástek.

Olaf se nechal zmást antisignálem. Vynásobil číslo 30 číslem 1,5 a vyšlo mu, že Uršula pracuje rychleji než Vilém. To však nijak nereflektoval, zjevně neprovedl sémantickou zkoušku. Následně správně sestavil rovnici, která popisuje, kolik součástek zkontroluje každý sám za x hodin. Řešení rovnice je správně.

Pracovní list k úloze Brigáda



Uršula s Vilémem si o prázdninách po 9. ročníku našli na zkrácený úvazek našli letní brigádu ve fabrice. Práce to byla sice jednotvárná, ale na druhou stranu dobře placená. Jejich úkolem bylo kontrolovat součástky. Vilém za hodinu dokázal zkontrolovat 30 součástek, což bylo 1,5krát víc, než dokázala za stejný čas Uršula. Jak dlouho by oběma trvalo zkontrolovat všech 300 součástek, které jim z výroby přivezli?

ELZA

OLAF

30 součástek vydělím 1,5 a zjistím, kolik dokázala zkontrolovat Uršula za 1 hodinu.

Oba společně dokážou za 1 hodinu zkontrolovat 50 součástek.

Zjistím tedy, kolikrát se těch 50 součástek vejde do 300.

$$30 : 1,5 = 300 : 15 = 20$$

$$V + U \dots\dots\dots 30 + 20 = 50$$

$$300 : 50 = 6$$



Kdyby pracovali společně, trvalo by jim zkontrolovat 300 součástek 6 hodin.

Vilém 30

Uršula $30 \cdot 1,5 = 45$

přivezli 300

čas kontroly x (hod)

za x hod:

Vilém $30 \cdot x$

Uršula $45 \cdot x$

rovnice:

$$30 \cdot x + 45 \cdot x = 300$$

$$75 \cdot x = 300 \quad | :75$$

$$x = \frac{300}{75} = 4$$

V zadání je 1,5krát více. Uršula tedy zkontroluje 45 součástek za hodinu.

Čas, který budou potřebovat ke kontrole 300 součástek označím x .

Zapíšu, kolik součástek zkontroluje každý sám za x hodin.

Sestavím příslušnou rovnici, když budou pracovat společně.



Oběma by trvalo zkontrolovat 300 součástek 4 hodiny.

Metodický list k úloze Šťáva

9. ročník

Téma: zlomky, poměr, jednotky objemu

Dostali jste za úkol připravit pro celý tábor šťávu z vody a z jedné láhve malinového sirupu. Na sirupu o objemu 700 mililitrů je napsáno, že vystačí na celkem 7 litrů šťávy. Protože by však toto množství šťávy pro všechny nestačilo, rozhodli jste se smíchat sirup s dvojnásobným množstvím vody. Vyjádřete zlomkem v základním tvaru, jakou část šťávy tvoří sirup.⁸⁶

Zadání úlohy, kterou lze řešit úvahou ve třech krocích, může být vnímáno jako nedořečené. Není totiž jasné, k čemu se vztahuje „s dvojnásobným množstvím vody“. Žáci by měli z kontextu vyvodit, že se myslí dvojnásobné množství vody, než je doporučeno výrobcem sirupu.

Úloha je komplikována nutností koordinovat množství vody, množství sirupu a množství vzniklé šťávy a uvědomit si, že se jedná o poměr (koncentrát).

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. K čemu se vztahuje informace s *dvojnásobným množstvím vody*?

2. V úkolu 1 jste zjistili, že zadání není zcela jednoznačné. Jak by šlo zadání přeformulovat, aby se bylo jednoznačné?

3. Jak se změní chuť šťávy, když sirup smíchám s dvojnásobným množstvím vody, než je doporučované?

Rozvoj jazykové gramotnosti

6. Kolikrát více vody bude ve šťávě, pokud sirup připravíš s *dvojnásobným množstvím vody*?
O jaký typ číslovky se v každém případě jedná?

7. Podívej se do Slovníku spisovného jazyka českého na heslo „sirup“. Poté řekni, v jakém významu je užito slovo *sirup* v této slovní úloze.

8.
a) Jakými větnými členy jsou slovesa *připravit* a *smíchat*?
b) V jakém tvaru jsou slovesa?
c) Přeformuluj první větu tak, aby sloveso bylo jiným větným členem a zároveň jsi neporušil/a smysl slovní úlohy.

⁸⁶ Úloha a řešení fiktivních žáků viz práce (Kohout, O. [2021, s. 45.] *Porovnávání strategií při řešení typových slovních úloh*. Bakalářská práce. PedF UK).

4. Jak koncentrovaná bude šťáva, pokud ji vyrobíme podle doporučení výrobce? Jakou část bude tvořit sirup?

9. Vypiš z první věty neshodné přívlastky. Dávala by věta smysl, pokud bys je přeformuloval/a na shodné? Mohl/a bys úlohu vyřešit?

5. Jaký je objem jedné láhve malinového sirupu? S jakým objemem vody ji máš podle výrobce smíchat?

10. Přeformuluj úlohu tak, abys z infinitivů vytvořil/a určité slovesné tvary. Jaké druhy vedlejších vět vzniknou?

Řešení

(1) Formulace není zcela jednoznačná; z kontextu lze vyvodit, že se jedná o dvojnásobné množství vody, než doporučuje výrobce. (2) Např. dodat *než je doporučeno výrobcem*. (3) Bude méně sladká, s žáky lze navodit i diskusi o koncentraci. (4) Sirup bude tvořit $700/7000=1/10$ šťávy. (5) Objem je 700 ml; výrobce doporučuje ji smíchat s 6 300 ml vody (tento úkol je již značně návodný, učitel by ho měl použít, jen pokud by žáci nevěděli, jak začít). (6) Dvakrát více, obojí jsou číslovky násobné. (7) Hustý cukerný roztok. (8) a) Předměty, b) neurčitým, c) např. podmět: *Připravit pro celý tábor šťávu z vody a z jedné láhve malinového sirupu je obtížné. Na sirupu o objemu 700 mililitrů je napsáno, že vystačí na celkem 7 litrů šťávy.* (9) Šťáva z vody, šťáva z láhve, z láhve sirupu; ne: *Dostali jste za úkol připravit pro celý tábor vodovou/vodní šťávu a lahovou šťávu z jedné sirupové láhve.* Úloha by byla zcela nesrozumitelná, nešla by vyřešit. (10) *Dostali jste za úkol, abyste připravili...; rozhodli jste se, že smícháte ...* (vedlejší věty předmětné).



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Oba fiktivní žáci správně převedli litry na mililitry, aby nemuseli pracovat s desetinnými čísly.



Kazi chybně vynásobila dvěma množstvím šťávy namísto množstvím vody. Počítá tedy, jako bychom měli udělat 14 litrů šťávy.

Bivoj určil, kolik vody je ve šťávě o objemu 7 litrů, a toto množství vynásobil dvěma. Poté zjistil, jaký objem má nová šťáva, a touto hodnotou vydělil objem sirupu. Dospěl ke správnému výsledku.

Pracovní list k úloze Šťáva



Dostali jste za úkol připravit pro celý tábor šťávu z vody a z jedné láhve malinového sirupu. Na sirupu o objemu 700 mililitrů je napsáno, že vystačí na celkem 7 litrů šťávy. Protože by však toto množství šťávy pro všechny nestačilo, rozhodli jste se smíchat sirup s dvojnásobným množstvím vody. Vyjádřete zlomkem v základním tvaru, jakou část šťávy tvoří sirup.

KAZI

$$1 \text{ l} = 1\,000 \text{ ml}$$



$$7 \text{ l} = 7\,000 \text{ ml}$$

$$7\,000 \cdot 2 = 14\,000$$

$$\frac{700}{14\,000} = \frac{7}{140} = \frac{1}{20}$$

Nejdřív si převedu litry na mililitry, abych měla stejné jednotky.

Šťávy má být dvojnásobné množství. Proto vynásobím dvěma.

Nyní vyjádřím, jakou část tvoří sirup ve šťávě.

Po zkrácení dostávám výsledek.



Sirup tvoří $\frac{1}{20}$ šťávy.

BIVOUJ

$$7 \text{ l} = 7\,000 \text{ ml}$$

$$7\,000 - 700 = 6\,300$$

$$6\,300 \cdot 2 = 12\,600$$

sirup 700 ml

voda 12 600 ml

šťáva 13 300 ml

$$\frac{700}{13\,300} = \frac{7}{133} = \frac{1}{19}$$

Převedu litry na mililitry.

Vypočítám množství vody v původních 7 litrech šťávy. Poté ho vynásobím dvěma.

Sečtu objemy sirupu a vody, dostanu objem šťávy.

Nyní už jen vyřeším podíl objemů sirupu a šťávy.

Zkrátím a dostávám výsledek.



Sirup tvoří $\frac{1}{19}$ šťávy.

Metodický list k úloze Bonbóny

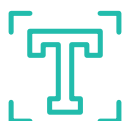
9. ročník

Téma: úloha o směsi, úloha s antisignálem

V prodejně neskutečně levných cukrovinek prodávají červené bonbóny po 8 Kč za stogramový sáček. Stogramový sáček červených bonbónů je o 4 Kč levnější než stogramový sáček žlutých bonbónů. Paní prodavačka vzala 5 sáčků od každého druhu bonbónů, udělala z nich směs a prodávala ji na váhu. Kolik stálo 50 g této směsi?⁸⁷

Tato slovní úloha je typická úloha o směsi, která je komplikovaná přítomností antisignálu (slovo levnější evokuje odčítání od ceny červených bonbónů, ale k ceně červených bonbónů musíme přičítat, abychom dostali cenu žlutých). V našem výzkumu s žáky 8. ročníku, jimž byla úloha zadána, přítomnost antisignálu významně ovlivnila úspěšnost (úspěšnost se snížila ze 40 % na 23 %).⁸⁸ Ve škole se úlohy o směsi zpravidla řeší rovnicemi, námi nabízená řešení jsou založena spíše na úvaze opřené o dobrý situační model úlohy.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Jakou barvu měly bonbóny ve směsi, kterou paní prodavačka vytvořila?
2. Které bonbóny byly dražší? Červené, nebo žluté?
3. Byla směs, kterou paní prodavačka vytvořila, levnější, nebo dražší než červené bonbóny?
4. Kolik gramů směsi paní prodavačka vytvořila?
5. Přepiš spojení *stogramový sáček* tak, abys použil/a číslici a fyzikální značku pro gram.

Rozvoj jazykové gramotnosti

7. Vysvětli výraz *prodávat něco na váhu*. Co se dá například ještě koupit tzv. na váhu?
8. Zhodnoť výraz *prodejna cukrovinek*. Setkáváš se s ním v rozhovorech s rodiči či s kamarády? Použil/a bys tento výraz také, nebo užíváš jiný? Jaký?
9. Jakými způsoby vznikla slova *stogramový* a *prodavačka*?

⁸⁷ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 402). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.

⁸⁸ Vondrová et al. 2019, s. 277.

6. Platí toto tvrzení? *Sáček červených bonbónů je levnější než sáček žlutých bonbónů. Abychom dostali cenu žlutých bonbónů, musíme uplatit operaci odčítání.*

Řešení

(1) Červenou a žlutou. (2) Žluté. (3) Dražší. (4) 1000 g, tedy 1 kg. (5) 100g sáček, nebo sáček o objemu 100 g (v češtině možno použít k výkladu o psaní výrazů spojených z číslic a slov). (6) Ne – antisignál. (7) Uvedeme cenu nejčastěji za 100 g či 1 kg zboží, zboží zvážíme a přepočítáme cenu; např. ovoce, maso, oříšky, ale i třeba hřebíky v železářství apod. (8) Otevřená úloha; lze pracovat s Českým národním korpusem,⁸⁹ v současnosti se používá spíše v *cukrárně*, případně se použije původní vlastní jméno, které se adaptuje pro jazykový systém češtiny („Koupil jsem si kyselé pendreký v *kandy stóru*.” – obohacování slovní zásoby). (9) Skládáním, odvozováním (přechýlením).



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Bivoj⁹⁰ se nechal zmást antisignálem a na základě slova *levnější* odečetl místo aby přičetl. Zbytek jeho řešení je správný. Na základě hmotnosti celé směsi a její ceny určil cenu sáčku směsi o hmotnosti 50 gramů přes trojčlenku.



Kazi správně určila cenu žlutých bonbónů přičítáním. Uvědomila si, že bonbóny obou druhů budou ve směsi zastoupeny stejně, protože prodavačka vzala od obou stejné množství. Na základě toho Kazi určila, kolik stojí 25 gramů od každého druhu, a ceny sečetla.

Bivoj řešil úlohu algebraicky, zatímco Kazi aritmeticky.

⁸⁹ <https://www.korpus.cz/>

⁹⁰ Řešení fiktivních žáků viz práce (Kohout, O. [2021, s. 43.] *Porovnávání strategií při řešení typových slovních úloh*. Bakalářská práce. PedF UK).

Pracovní list k úloze Bonbóny



V prodejně neskutečně levných cukrovinek prodávají červené bonbóny po 8 Kč za stogramový sáček. Stogramový sáček červených bonbónů je o 4 Kč levnější než stogramový sáček žlutých bonbónů. Paní prodavačka vzala 5 sáčků od každého druhu bonbónů, udělala z nich směs a prodávala ji na váhu. Kolik stálo 50 g této směsi?

BIVOJ

Cenu stogramového sáčku červených bonbónů si označím Č a žlutých Ž.

Ted' určím hmotnost a cenu směsi.

Ted' vím, že 1 000 gramů směsi stojí 60 Kč.

Přes přímou úměrnost určím cenu za 50 gramů.

Dostávám, že sáček bude stát 3 Kč.

cena 100 g červených Č Kč

cena 100 g žlutých Ž Kč

$$\checkmark = 8$$

$$\checkmark = \checkmark - 4 = 8 - 4 = 4$$

Směs:

1) hmotnost

$$5 \cdot 100 + 5 \cdot 100 = 1\,000$$

2) cena

$$5 \cdot \checkmark + 5 \cdot \checkmark = 40 + 20 = 60$$

1 000 g 60 Kč

50 g x Kč

$$\frac{x}{60} = \frac{50}{1000} = \frac{1}{20}$$

$$x = \frac{1}{20} \cdot 60 = \frac{60}{20} = 3$$

$$x = 3 \text{ Kč}$$

50 gramů směsi bonbónů stálo 3 Kč.



KAZI

Nejdřív určím, za kolik korun prodávají stogramový sáček žlutých bonbónů.

Sáček žlutých bonbónů je o 4 Kč dražší než sáček červených. Tedy stojí 12 Kč.

červené 8 Kč

žluté ? Kč

$$\text{žluté} \dots\dots\dots 8 + 4 = 12$$

$$50 : 2 = 25$$

$$25 \text{ g je } \frac{1}{4} \text{ ze } 100 \text{ g}$$

červené:

$$8 : 4 = 2 \text{ Kč}$$

žluté:

$$12 : 4 = 3 \text{ Kč}$$

Cena 50 g směsi:

$$2 + 3 = 5 \text{ Kč}$$

50 gramů směsi červených a žlutých bonbónů stálo 5 Kč.



Ve směsi bude polovina červených a polovina žlutých bonbónů.

Tedy 50 g směsi tvoří 25 g červených a 25 g žlutých bonbónů. 25 g je jedna čtvrtina ze 100 g.

Ceny sáčků vydělím čtyřmi.

Nakonec je sečtu.

Metodický list k úloze Hory

9. ročník

Téma: úloha o pohybu, přímá úměrnost

Kamarádi Honza a Tomáš si jednou v sobotu zavolali a zjistili, že se oba na víkend ubytovali v Jizerských horách, ale každý na jiném konci. Jejich penziony byly od sebe vzdáleny 31,5 km. Dohodli se, že se odpoledne někde potkají. Společně si naplánovali trasu a vyrazili ve stejný čas směrem k penzionu toho druhého. Honza se vydal pěšky průměrnou rychlostí 2,6 km/h, zatímco Tomáš jel na kole průměrnou rychlostí 10 km/h. Za jak dlouhou dobu se oba potkali? Kolik kilometrů ušel do té doby Honza?⁹¹

Tato slovní úloha je úlohou o pohybu. Snaží se být „realistická“, ovšem je zřejmé, že jde o zjednodušenou realitu. S žáky je tedy možné diskutovat o tom, jaké předpoklady jsou zamlčeny (např. že oba chlapci půjdou zmíněnou cestou, která měří celkem 31,5 km, že se na ní dá jít jak pěšky, tak jet na kole, že je nic po cestě nezdrží apod.).

Námi navržená řešení zahrnují jednak standardní řešení pomocí vzorce pro rychlost a jednak řešení pomocí přímé úměrnosti. Druhý zmíněný způsob je pro podobné úlohy netypický, ale svědčí o řešitelově dobrém vhledu do situace.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Vysvětli, co to znamená, že Honza šel *průměrnou rychlostí 2,6 km/h*.
2. Ušli pěšky nebo ujeli na kole oba kamarádi podle slovní úlohy 31,5 km?
3. Jaký byl asi terén, když šel Honza průměrnou rychlostí 2,6 km?
4. Bez počítání: urazil delší trasu Honza, nebo Tomáš?

Rozvoj jazykové gramotnosti

5. Rozhodni, zda slovní úloha nejspíše připomíná slohový útvar
 - a) vyprávění,
 - b) výklad,
 - c) oznámení.
6. Vysvětli pravopis velkého písmene v *Jizerské hory*. V jaké jiné souvislosti také napíšeš v tomto přídatném jméně velké písmeno?
7. Zpracuj do třetího větného celku přímou řeč.

⁹¹ Úloha a řešení fiktivních žáků upraveny podle práce (Kohout, O. [2021, s. 33.] *Porovnávání strategií při řešení typových slovních úloh*. Bakalářská práce. PedF UK).

Řešení

(1) Někdy mohl jít rychleji, někdy pomaleji, v průměru však za hodinu ušel 2,6 kilometrů. (2) Ne, potkali se už na cestě, nikdo z nich neušel/neujel celých 31,5 km. (3) Půjde zřejmě hodně do kopce, jde poměrně pomalu. (4) Tomáš; ze zadání je patrné, že se pohyboval rychleji – kontextová verifikace výpočtu. (5) a) (6) „U vlastních názvů tvořených spojením přídavného jména a podstatného jména obecného se velké písmeno píše jen u přídavného jména“, ⁹² Jizerská padesátka. (7) Např.: *Předtím, než každý vyrazil z jiného konce, řekl Tomáš: „Někde na trase se potkáme.“*



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Tristan řešil úlohu fyzikálně. Využil vzorce pro rychlost a faktu, že čas je pro oba chlapce stejný (setkají se v určitém okamžiku). Uvědomil si, že součet délek tras obou chlapců musí být roven délce celé trasy, a sestavil lineární rovnici.



Izolda vyřešila úlohu netypicky, a to úvahou pomocí přímé úměrnosti. Uvědomila si, že ví, kolik kilometrů urazí za jednu hodinu oba chlapci dohromady, a následně tento údaj použila k určení času nutného pro celou trasu.

Je možné položit žákům doplňující otázku, v jakém poměru jsou trasy obou kamarádů. [Ve stejném jako jejich rychlosti, 2,6 : 10 (tedy 13 : 50).]

⁹² Internetová jazyková příručka (<https://prirucka.ujc.cas.cz/?id=602>).

Pracovní list k úloze Hory



Kamarádi Honza a Tomáš si jednou v sobotu zavolali a zjistili, že se oba na víkend ubytovali v Jizerských horách, ale každý na jiném konci. Jejich penziony byly od sebe vzdáleny 31,5 km. Dohodli se, že se odpoledne někde potkají. Společně si naplánovali trasu a vyrazili ve stejný čas směrem k penzionu toho druhého. Honza se vydal pěšky průměrnou rychlostí 2,6 km/h, zatímco Tomáš jel na kole průměrnou rychlostí 10 km/h. Za jak dlouhou dobu se oba potkali? Kolik kilometrů ušel do té doby Honza?

TRISTAN

jméno	rychlost (km/h)	čas (h)	trasa (km)
Honza	$v_1 = 2,6$	t	$s_1 = v_1 \cdot t$
Tomáš	$v_2 = 10$	t	$s_2 = v_2 \cdot t$

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 \\ s &= v_1 \cdot t + v_2 \cdot t \\ s &= 31,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 31,5 &= 2,6 \cdot t + 10 \cdot t \\ 31,5 &= 12,6 \cdot t \end{aligned}$$

$$t = 2,5$$

$$s_1 = v_1 \cdot t = 2,6 \cdot 2,5 = 6,5$$

Honza a Tomáš se potkali za 2,5 hodiny.
Honza ušel do setkání 6,5 km.



Nejprve si udělám tabulku, do níž napíšu vše, co budu k řešení potřebovat.

Čas strávený oběma na trase bude stejný, označím ho t .

Délky tras chlapců budou rovny součinům jejich rychlostí a času t .

Musí platit, že součet délek tras obou chlapců je roven délce $s = 31,5$ km. Za s_1 a s_2 dosadím podle tabulky.

Řeším lineární rovnici s neznámou t .

IZOLDA

Oba společně:	
1 h	12,6 km
t h	31,5 km

$$t = 1 \cdot \frac{31,5}{12,6} = \frac{315}{126} = \frac{5}{2}$$

Honzova cesta:	
1 h	2,6 km
2,5 h	s km

$$s = 2,6 \cdot \frac{2,5}{1} = 2,6 \cdot 2,5 = 6,5$$

Honza a Tomáš se potkali za 2,5 hodiny.
Honza ušel do setkání 6,5 km.



Honza ušel za hodinu 2,6 km. Tomáš ujel na kole za hodinu 10 km. Společně tak za hodinu urazili 12,6 km. Celá trasa měřila 31,5 km.

Nyní dokážu přes přímou úměrnost určit, za kolik hodin oba urazili celou trasu, tedy t . Teď už vím, že se oba potkali za 2,5 hodiny.

Když vím, že Honza ušel za 1 hodinu 2,6 km, pak za 2,5 hodiny ušel 2,5krát více km. Dostávám, že Honza do setkání ušel 6,5 km.

Metodický list k úloze Sprinteři

9. ročník

**Téma: operátorová úloha,
úloha o pohybu, zlomky**

Dva kamarádi, Albert a Bedřich, se rozhodli zahrát si na sprintery, kteří se učí závodit na běžecké dráze. Poprosili Quida, aby se postavil do cíle trasy, kterou si společně vytyčili, a vytvořil jim cílovou fotografii, tak jako to dělají na velkých závodech. Protože Albert běhá v průměru o čtvrtinu rychleji než Bedřich, dal Bedřichovi náskok, aby proběhli cílem společně. Jak dlouhou část trasy dostal Bedřich náskok?⁹³

Tato slovní úloha je obtížná nejen tím, že se jedná o úlohu o pohybu, ale zejména proto, že se jedná o úlohu operátorovou. Nejsou dána čísla v roli stavu (tedy rychlost některého z chlapců a délka trasy), všechna čísla jsou v roli operátoru. To je pro mnohé žáky obtížné a úlohu vzdávají s tím, že se nedá řešit. Žáci si musí uvědomit, že jde jen o vzájemné vztahy operátorů. Jedno z nabízených řešení se právě o toto uvědomění opírá. Je doplněno grafickou interpretací, která by mohla pochopení řešení ulehčit. Druhé z nabízených řešení obchází zmíněnou obtíž absencí stavu tím, že je v něm vhodně zvolena délka trasy a rychlost jednoho z chlapců. S žáky je pak třeba diskutovat o tom, zda si uvědomují, že tento stav si mohli zvolit libovolně. K obecnosti řešení je možné je dovést tak, že si řešení vyzkouší s různými počátečními stavy. Cílem je, aby si žáci uvědomili obecnost řešení operátorových úloh – na čísla v roli stavu v jejich řešení nezáleží, záleží jen na vzájemných vztazích operátorů.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Kterou část textu **nepotřebuješ** znát k vyřešení slovní úlohy?
2. Když pojeděš na kole rychlostí 10 kilometrů za hodinu a tvůj kamarád pojedě o čtvrtinu rychleji/pomaleji, jak rychle pojedě? Kolik ujedete oba za dvě hodiny nebo za půl hodiny?

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Souvětí *Dva kamarádi, Albert a Bedřich, se rozhodli zahrát si na sprintery, kteří se učí závodit na běžecké dráze* uprav tak, aby obsahovalo tři věty. Neměň význam a zachovej všechny informace.

⁹³ Úloha a řešení fiktivních žáků upraveny podle práce (Kohout, O. [2021, s. 36.] *Porovnávání strategií při řešení typových slovních úloh*. Bakalářská práce. PedF UK).

3. Zkus si situaci ze zadání graficky zaznamenat. Pokud to nepůjde obecně, zkus si zvolit nějaké konkrétní hodnoty pro rychlosti obou chlapců a vyznačit si, kde budou po jedné sekundě, po dvou sekundách atd.

- 5.
- V textu je užit výraz *vytyčit trasu*. Vysvětli, jak mu v úloze rozumíš.
 - Tento výraz lze použít i v jiném významu, pokus se ho vyjádřit.

6. Prohlédni si výrazy *postavit se do cíle*, *cílová fotografie*, *mít náskok*. V jakých textech nebo komunikačních situacích se s těmito výrazy nejčastěji setkáš?

7. Jak se nazývá závěrečná část závodu, kdy atleti zrychlují do cílové rovinky? Vytvoř podstatné jméno i sloveso.

- 8.
- Zakresli graf souvětí *Poprosili Quida, aby se postavil do cíle trasy, kterou si společně vytyčili, a vytvořil jim cílovou fotografii*.
 - Odůvodni psaní čárky před spojkou *a*.

Řešení

(1) ..., kteří se učí závodit na běžecké dráze. Poprosili Quida, aby se postavil do cíle trasy, kterou si společně vytyčili, a vytvořil jim cílovou fotografii, tak jako to dělají na velkých závodech. **(2)** Pomocí konkrétních hodnot si žáci snáze představí vztahy mezi oběma rychlostmi; 12,5 km/h, resp. 7,5 km/h; 20 km/25 km/15 km; 5 km/6,25 km/3,75 km. **(3)** Grafické zaznamenání by mohlo u žáků vyvolat lepší pochopení situace. **(4)** Dva kamarádi, Albert a Bedřich, se rozhodli, že si zahrají na sprintery, kteří se učí závodit na běžecké dráze. **(5)** Vytyčiti (co): odb. vyznačit, ohraničit, vymezit v terénu (něj. plochu, směr n. výšku, zprav. tyčemi, kolíky ap.): v. staveniště; v. závodní dráhu; v. půdorys stavby; v. směr hranic; v. železniční trať.⁹⁴ **(6)** Texty se sportovní tematikou, např. reportáže. **(7)** Finiš; „finišovat [-ny-] ned. ukončovat závod finišem; přen. hovor. f. v práci snažit se dokončit práci zvýšeným úsilím“.⁹⁵ **(8)** a) viz dole, b) čárku píšeme, protože věta vložená (3. VV přívlastková) se odděluje z obou stran čárkou.

1. VH

2. VV předmětná + 4. VV předmětná
3. VV přívlastková



Individuální řešení úlohy

⁹⁴ Slovník spisovného jazyka českého (<https://sjc.ujc.cas.cz/>).

⁹⁵ Petráčková, V., Kraus, J. et al. (1997). *Akademický slovník cizích slov*. Academia.



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Izolda vyřešila absenci stavů (délky trasy a rychlostí) zvolením vhodných konkrétních hodnot. Na jejich základě určila náskok, který musel Bedřich obdržet, a správně určila, jakou část z celé dráhy tento náskok tvoří. Řešení je správné. Doporučujeme, aby učitel s žáky zavedl debatu ohledně obecnosti řešení – kdyby si Izolda zvolila jiné hodnoty, vyšlo by jí to stejně? Izolda si mohla zvolit jakoukoli jinou nenulovou délku trasy a rychlost, protože správně určuje poměr mezi náskokem a délkou celé trasy.



Tristan na základě správné úvahy o vztahu rychlostí a vzdáleností vyřešil úlohu bez volby vstupních hodnot. Vhodná grafická reprezentace mu umožňuje elegantní řešení.

Návazná práce



Operátorové úlohy nejsou podle našich zkušeností v učebnicích příliš časté. Proto by bylo vhodné, aby je učitel zařadil a žáci si mohli upevnit poznatky získané při práci s úlohou Sprinteři. Několik takových úloh uvádíme,⁹⁶ přičemž úlohy uvedené na začátku jsou vhodné i pro žáky 1. stupně. U žáků 2. stupně bychom je zařadili v případě, že měli s pochopením principu řešení úlohy Jízdné závažné problémy. V závorce je vždy uveden výsledek. Procentuální výsledky úspěšnosti řešení u těchto úloh (oproti jejich variantám, v nichž jsme jeden počáteční stav nabídli a v nichž byli žáci obecně úspěšnější) lze najít v kap. 11 knihy shrnující náš výzkum slovních úloh.⁹⁷

V Metodice nabízíme ještě jednu operátorovou úlohu (POR28. Jízdné).

V tomto týdnu Otesánek rychle přibyl na váze. Ve středu vážil o 7 kilogramů více než v pondělí, ale o 4 kilogramy méně než v neděli. Kolik kilogramů Otesánek během tohoto týdne přibral? [11 kg]

Kovové kružítko je šestkrát dražší než mikrotužka, mikrotužka je třikrát dražší než pravítko. Kolikrát je kružítko dražší než pravítko? [18krát]

Kovové kružítko je šestkrát dražší než mikrotužka, pravítko je třikrát levnější než mikrotužka. Kolikrát je kružítko dražší než pravítko? [18krát]

⁹⁶ Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019, s. 175). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.

⁹⁷ Vondrová et al., 2019.

Pracovní list k úloze Sprinteři



Dva kamarádi, Albert a Bedřich, se rozhodli zahrát si na sprintery, kteří se učí závodit na běžecké dráze. Poprosili Quida, aby se postavil do cíle trasy, kterou si společně vytyčili, a vytvořil jim cílovou fotografii, tak jako to dělají na velkých závodech. Protože Albert běhá v průměru o čtvrtinu rychleji než Bedřich, dal Bedřichovi náskok, aby proběhli cílem společně. Jak dlouhou část trasy dostal Bedřich náskok?

IZOLDA

Nikde není zmínka o délce trasy a rychlosti alespoň jednoho z chlapců. Tak si to nějak vhodně zvolím



délka trasy 100 m

A 5 m/s

B 4 m/s

dobu běhu $100 : 5 = 20$

trasa Bedřich $20 \cdot 4 = 80$

náskok $100 - 80 = 20$

$$\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

Chlapci musí trasu uběhnout ve stejném čase. Poběží 20 sekund.

Za tu dobu uběhne Bedřich 80 metrů.

Takže musel získat náskok 20 metrů.

Ted' jen dopočítám, jaká část je 20 metrů ze 100 metrů.

To je jedna pětina.

TRISTAN

Když Albert běhá v průměru o čtvrtinu rychleji než Bedřich, pak ve stejném čase uběhne o čtvrtinu delší trasu.



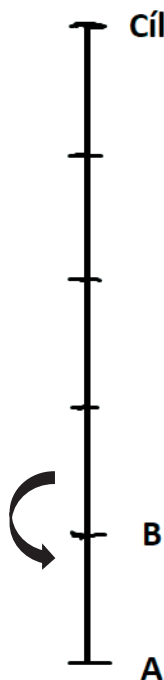
Nakreslím si obrázek.

Udělám úsečku od cíle až k Bedřichovi a rozdělím ji na 4 shodné díly.

Ted' doplním Alberta. Ten bude od cíle ještě o čtvrtinu dále než Bedřich.

Z obrázku vidím, že náskok Bedřicha v rámci celé trasy je jedna pětina.

Mám výsledek.



Bedřich získal jako náskok pětinu trasy.

Metodický list k úloze Sekání

9. ročník

Téma: společná práce, čas

Když seká zahradu tatínek, trvá mu to 1,5 hodiny. Občas přenechá posekání zahrady sousedovic Jendovi, kterému to sice trvá o půl hodiny déle než tatínkovi, ale sekání zahrady je jeho hobby. Navíc si vždy přiveze vlastní sekačku a tatínek tu svou aspoň nemusí vytahovat ze sklepa. V předpovědi hlásili, že do hodiny má začít pršet, proto si tatínek zavolal na pomoc Jendu, že budou sekát zahradu spolu. Stihnou zahradu do hodiny posekat? Zdůvodni.⁹⁸

Tato slovní úloha patří mezi úlohy o společné práci. Její kontext je reálný a dobře představitelný. Úloha nevyžaduje složité výpočty. Podobně jako u jiných úloh na společnou práci je vhodné vést žáky k nákresu situace. Žáci budou mít tendenci při výpočtu pracovat s desetinnými čísly, ovšem protože je výsledkem racionální číslo, které není desetinné, je vhodné pracovat se zlomky.

Společná práce s textem úlohy



Porozumění textu úlohy

1. Vypiš z textu slovní úlohy jenom ty informace, které potřebuješ k jejímu vyřešení.

2. Za jak dlouho by tatínek posekal dvě takové zahrady? Jak dlouho by to trvalo Jendovi?

3. Jakou část zahrady poseká tatínek za hodinu? Jakou část zahrady Jenda? Nakresli si obrázek.

Rozvoj jazykové gramotnosti

4. Vypiš z textu alespoň čtyři slova vzájemně příbuzná. Urči u jednotlivých slov slovní druh.

5. Nahraď slova *kterému* a *hobby* synonymem.

6. Obsahuje úloha nějaký nespisovný slovní tvar?

Řešení

(1) Tatínek stihne posekat zahradu sám za 1,5 hodiny; Jendovi to trvá o půl hodiny déle než tatínkovi; tatínek a Jenda měli každý svou sekačku; tatínek a Jenda sekali společně jednu zahradu. (2+3) Za 3, resp. 4 hodiny; dvě třetiny, resp. jednu polovinu zahrady; otázky mají za cíl usnadnit žákům tvorbu situačního a matematického

⁹⁸ Úloha a řešení fiktivních žáků upraveny podle práce (Kohout, O. [2021, s. 39.] Porovnávání strategií při řešení typových slovních úloh. Bakalářská práce. PedF UK).

modelu. **(4)** *Seká* (sloveso), *posekání* (podstatné jméno), *sekání* (podstatné jméno), *sekačku* (podstatné jméno), *sekat* (sloveso), *posekat* (sloveso). **(5)** *Jemuž, záliba, koníček*. **(6)** *Sousedovic*, správně *sousedovu Jendovi, sousedových Jendovi*.



Individuální řešení úlohy



Práce ve dvojicích na pracovním listu a následná reflexe

Oba předložené způsoby jsou si podobné v tom, že fiktivní žáci počítali, kolik zahrad by tatínek a Jenda teoreticky posekali za určitou dobu.



Elza využila nejmenšího společného násobku celkových časů nutných na posekání zahrady u tatínka a Jendy. Žáci by si měli uvědomit, že Elza zvolila daný postup proto, že jde o nejkratší dobu, za kterou oba zvládnou posekat určitý celočíselný počet zahrad. Nejmenším společným násobkem je 360 minut a za tuto dobu by společně posekali 7 zahrad. Jednu sedminu, tedy jednu zahradu společně posekají za $360 : 7$ minut.

Olaf nejdříve zjistil, jakou část zahrady poseká tatínek a Jenda za dvě hodiny. K tomu si vytvořil obrázek, který záměrně neuvádíme (žáci by se jej měli pokusit vytvořit sami – předpokládáme, že si nakreslí obdélníky jako zahrady a rozdělí je na části po půl hodinách). Olaf zjistil, že za dvě hodiny by oba společně posekali sedm třetin zahrady. Obdobně jako Elza určil konečný výsledek pomocí přímé úměrnosti.

Pracovní list k úloze Sekání



Když seká zahradu tatínek, trvá mu to 1,5 hodiny. Občas přenechá posekání zahrady sousedovic Jendovi, kterému to sice trvá o půl hodiny déle než tatínkovi, ale sekání zahrady je jeho hobby. Navíc si vždy přiveze vlastní sekačku a tatínek tu svou aspoň nemusí vytahovat ze sklepa. V předpovědi hlásili, že do hodiny má začít pršet, proto si tatínek zavolal na pomoc Jendu, že budou sekát zahradu spolu. Stihnou zahradu do hodiny posekat? Zdůvodni.

ELZA



Nejdřív si udělám zápis.

Tedy určím nejmenší společný násobek čísel 90 a 120.

Kdyby tedy tatínek pracoval 360 min, posekal by 4 zahrady.

Jenda by posekal 3 zahrady. Společně by za 6 hodin posekali 7 zahrad.

Tedy 1 zahradu stihli posekat za šest sedmin hodiny.

Stihnou to do hodiny.

tatínek: 1,5 hod = 90 min
 Jenda: 1,5 + 0,5 hod = 120 min
 $90 = 3 \cdot 30 \quad 120 = 4 \cdot 30$
 $\text{nsn}(90, 120) = 3 \cdot 4 \cdot 30 = 360$
 tatínek:
 90 min 1 zahrada
 360 min 4 zahrady
 Jenda:
 120 min 1 zahrada
 360 min 3 zahrady
 společně:
 360 min 7 zahrad
 $\frac{360}{7} \text{ min} = \frac{6}{7} \text{ hod} \dots 1 \text{ zahrada}$

OLAF

Nejdřív si zapíšu, jak dlouho trvá posekat zahradu každému zvlášť.

Pak si nakreslím obrázek a z něj vyčtu, jakou část zahrady poseká tatínek a Jenda za půl hodiny.

tatínek 1,5 hod
 Jenda 2 hod

Za půl hodiny

tatínek $\frac{1}{3}$ zahrady
 Jenda $\frac{1}{4}$

Za 2 hodiny:

Jenda 1 zahrada
 tatínek 1 a $\frac{1}{3}$ zahrady
 oba 2 a $\frac{1}{3}$ zahrady

$$2 + \frac{1}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}$$

2 hodiny $\frac{7}{3}$ zahrady

? hodin 1 zahrada

$$2 : \frac{7}{3} = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$$



Tedy budu předpokládat, že by oba pracovali tak dlouho, jako by trvalo zahradu posekat Jendovi samotnému.

Oba by za dvě hodiny posekali sedm třetin zahrady.

Přes trojčlenku zjistím výsledek.

Zahradu společně stihnou posekat za šest sedmin hodiny, přibližně za necelých 52 minut.

Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol prostřednictvím řešení slovních úloh

Porovnávání

Nad'a Vondrová, Martina Šmejkalová

Grafická úprava:
MgA. Denisa Kokošková

Vydala Univerzita Karlova — Pedagogická fakulta
Rok vydání: 2023
Počet stran: 164
Formát: A4
1. vydání

ISBN 978-80-7603-434-1